Superficies y Sólidos de revolución

Ahora veremos un tipo de superficie generada por el movimiento de una curva, y para la cual hay ciertas fórmulas que permiten calcular su área y el volumen encerrado por ella.

1 Superficies de revolución

Una superficie de revolución es aquella generada una curva plana $\mathcal{C}$ (contenida en un plano coordenado) al girar alrededor de uno de los ejes del plano.

Aclaración: hay una definición más general de las superficies de revolución, pero nosotros trabajaremos con la arriba presentada.

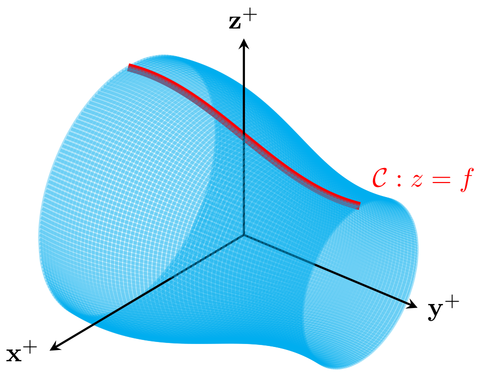

Figure 1: Superficie de revolución obtenida al girar la curva $\mathcal{C}$ alrededor del eje y.

1.0.1 Determinación de la ecuación de una superficie de revolución

A continuación presentamos una tabla que muestra cómo obtener la ecuación de la superficie de revolución generada por una curva $\mathcal{C}$.

Generatriz	**Eje de rotación**	**Ecuación de la superficie**
$\mathcal{C} : F(x, y) = 0$ (contenida en en plano xy) $\mathcal{C} : F(x, z) = 0$ (contenida en en plano xz)	x	$S : F\left(x; \pm\sqrt{y^2 + z^2}\right) = 0$
$\mathcal{C} : F(x, y) = 0$ (contenida en en plano xy) $\mathcal{C} : F(y, z) = 0$ (contenida en en plano yz)	y	$S : F\left(y; \pm\sqrt{x^2 + z^2}\right) = 0$
$\mathcal{C} : F(x, z) = 0$ (contenida en en plano xz) $\mathcal{C} : F(y, z) = 0$ (contenida en en plano yz)	z	$S : F\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0$

El uso del $\pm$ depende del contexto (en cuál cuadrante del plano coordenado está ubicada la curva generatriz $\mathcal{C}$, o si corta o no al eje de rotación, etc.), y a menudo *el signo $\pm$ puede cancelarse elevando convenientemente al cuadrado, o escribiendo la superficie a trozos.*

Ejemplo 1: Determinar la ecuación de las superficies de revolución generadas por la curva $\mathcal{C} : z = e^y$, y siendo los ejes de rotación el eje z y el eje y.

Notemos que aquí la curva se puede escribir como $\mathcal{C} : F(y, z) = z - e^y = 0$.

<u>Eje de rotación z</u>: De acuerdo a la tercer fila de la tabla previa, no debemos modificar la variable z (eje de rotación) en $F(y,z)$ y hay que sustituír y por $\pm\sqrt{x^2+y^2}$. Así la superficie resultará

$$S : z - e^{\pm\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \Rightarrow S : z = e^{\pm\sqrt{x^2+y^2}},$$

pero analizando la superficie, vemos que tiene dos partes: cuando el exponente es $+$ (positivo) ocurre $z \geq 1$, cuando es negativo tenemos $z < 1$ (esto sucede porque la curva $\mathcal{C}$ corta al eje z en $z = 1$). Así podemos reescribir la ecuación de la superficie:

$$S : \begin{cases} z = e^{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad z \geq 1 \\ z = e^{-\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad z \leq 1 \end{cases}.$$

<u>Eje de rotación y</u>: En este caso, dejamos sin modificar la variable y y reemplazamos z por $\pm\sqrt{x^2+z^2}$. Así, obtenemos

$$S : \pm\sqrt{x^2+z^2} = \underbrace{e^y}_{>0} \Rightarrow S : \sqrt{x^2+z^2} = e^y,$$

donde la simplificación del $\pm$ ocurrió analizando la positividad de la función exponencial e^y.

Otra opción, es elevar al cuadrado:

$$S : \pm\sqrt{x^2+z^2} = e^y \Rightarrow S : \left(\pm\sqrt{x^2+z^2}\right)^2 = (e^y)^2 \Rightarrow S : x^2+z^2 = e^{2y},$$

y obtenemos una expresión equivalente para la superficie.

1.1 Reconociendo superficies de revolución

> Las trazas de una superficie de revolución S, paralelas al plano coordenado que **no** contiene al eje de rotación, siempre son circunferencias o un punto.

Con ese criterio detectaremos si una superficie dada puede ser o no de rotación, cuál es su generatriz y cuál su eje de rotación.

Ejemplo 2: Mostrar que la superficie $S : F(x,y,z) = x^2+z^2-\sin^2 y = 0$ es de rotación.

Tomando trazas paralelas al plano coordenado xz, es decir $y = k$, tenemos que las trazas son secciones curvas $F(x,k,z) = \begin{cases} x^2+y^2-\sin k^2 = 0 \\ y = k \end{cases}$. Vemos que si $k = n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$ la traza es un punto, caso contrario una circunferencia. Así concluímos que el eje de rotación es el eje y (el que no está contenido en el plano xy).

Para hallar la curva generatriz, buscamos la traza de la superficie sobre un plano coordenado que contenga al eje de rotación (eje y es en este caso). Tomamos, por ejemplo, el plano xy, entonces la traza correspondiente la obtendremos haciendo $z = 0$, así $\mathcal{C} : F(x,y,0) = x^2 - \sin(y)^2 = 0 \Rightarrow \mathcal{C} : x = \sin(y)$.

Otro criterio muy útil es el siguiente:

> Una superficie $S : F(x,y,z) = 0$ será de revolución si la expresión de $F(x,y,z)$
>
> - tiene x^2+y^2 separado de z (eje de rotación z),
> - tiene x^2+z^2 separado de y (eje de rotación y),
> - tiene y^2+z^2 separado de z (eje de rotación x).

Ejemplo 3: En la superficie del ejemplo anterior $S : F(x,y,z) = x^2+z^2-\sin^2 y = 0$, como x^2+z^2 está separado de la variable y, sabemos que la superficie es de revolución y su eje de rotación es y. La curva generatriz $\mathcal{C}$ se obtiene como se indicó anteriormente.

Con este criterio podemos detectar cuándo ciertas cuádricas son de rotación o no.

Elipsoide de revolución: Si el elipsoide está dado por $\mathcal{E}: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, entonces es de revolución. Eje de rotación z, y la generatriz es la elipse $\mathcal{C}: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

Paraboloide de revolución: Si el paraboloide está dado por $\mathcal{E} : z = ax^2 + ay^2$, entonces es de revolución. Eje de rotación z, y la generatriz es la parábola $\mathcal{C} : z = ax^2$.

Otros ejemplos: El hiperboloide de una y dos hojas también puede ser revolución, al igual que el cono elíptico (que en este caso, se denomina *cono circular*).

2 Sólidos de revolución

Ahora introduciremos un nuevo elemento del espacio:

Un *sólido* es un conjunto del espacio cerrado y acotado, que tiene volumen.

Informalmente hablando, una superficie es una cáscara, mientras que un sólido es la unión de la superficie más todos los puntos que quedan encerrados por ella (hay definiciones más generales de sólidos para involucrar regiones de tamaño infinito, pero no las consideraremos).

Entonces, dado un sólido, podemos intentar medir dos atributos: el volumen (el espacio que ocupa) y su superficie (el área de su cáscara). Esto lo haremos restringiéndonos a un tipo particular de sólidos:

Un *sólido de revolución* es un conjunto generado al rotar una región plana alrededor de un eje.

En consecuencia, un sólido de revolución también puede definirse como *el conjunto del espacio encerrado por una o más superficies de revolución* (donde las superficies son las generadas por las curvas que definen la región que rota).

En vistas de lo anterior usaremos la expresión "sólido generado por la rotación de una curva" para referirnos no solo a la superficie que se genera al girar la curva, sino al cuerpo completo, es decir, al sólido de revolución entendido como la región del espacio encerrada por dicha superficie. Esto nos permite hablar de manera más directa, sin repetir constantemente esta distinción.

2.1 Volumen

El volumen del sólido de revolución obtenido al girar una curva $\mathcal{C} : y = f(x), z = 0$, contenida en el plano xy, con $a \le x \le b$, alrededor del eje x está dado por $V = \pi \displaystyle\int_a^b f(x)^2\,dx$.

Ejemplo 4: Calcular el volumen del paraboloide de revolución generado por la curva $\mathcal{C} : y = \sqrt{x}$, al girar alrededor del eje x.

Vemos que aquí, lo variable es la longitud h del paraboloide, que inicia en $x = 0$. Luego $a = 0$, $b = h$, $f(x) = \sqrt{x}$ y

$$V = \pi \int_0^h \left(\sqrt{x}\right)^2\,dx = \pi \int_0^h x\,dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^h = \pi\frac{h^2}{2}$$

Ejemplo 5: Calcular el volumen del sólido de revolución generado por la curva $\mathcal{C} : y = x^2$, contenida en el plano xy (¡no es un paraboloide!), entre los valores $a = 1$ y $b = 3$.

Entonces planteamos la integral $V = \pi \int_1^3 \left(x^2\right)^2 \, dx = \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_1^3 = \pi \left[\frac{3^5}{5} - \frac{1^5}{5}\right] = \pi \frac{242}{5}$.

Ejemplo 6: (*Volumen de la esfera*) vemos que la esfera sólida es generada por la rotación alrededor del eje x, del medio arco de circunferencia dado por $x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow y = \sqrt{R^2 - x^2}$, con $-R \leq x \leq R$. Así, el volumen será

$$
\begin{aligned}
V = \pi \int_{-R}^{R} \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 \, dx =& \pi \int_{-R}^{R} \left(R^2 - x^2\right) \, dx \\
&= \pi \left(R^2 \int_{-R}^{R} dx - \int_{-R}^{R} x^2 \, dx \right) \\
&= \pi R^2 \left[x\right]_{-R}^{R} - \pi \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 7: Calcular el volumen engendrado por un arco de sinusoide $y = \sin(x)$.

Aquí $f(x) = \sin(x)$, $a = 0$, $b = \pi$, y $V = \frac{\pi^2}{2}$.

2.1.1 Generalización

Lo anterior lo podemos generalizar según el eje de rotación y la curva $\mathcal{C}$:

- Sea una curva $\mathcal{C} : f(x)$ con $a \leq x \leq b$, contenida en el plano coordenado xz ($z = f(x)$) o xy ($y = f(x)$) , entonces el volumen del sólido de revolución obtenido al girarla alrededor del eje x es $V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$.
- Sea una curva $\mathcal{C} : f(y)$ con $a \leq y \leq b$, contenida en el plano coordenado xy ($x = f(y)$) o yz ($z = f(y)$), entonces el volumen del sólido de revolución obtenido al girarla alrededor del eje y es $V = \pi \int_a^b f(y)^2 \, dy$.
- Sea una curva $\mathcal{C} : f(z)$ con $a \leq z \leq b$, contenida en el plano coordenado xz ($x = f(z)$) o yz ($y = f(z)$), entonces el volumen del sólido de revolución obtenido al girarla alrededor del eje z es $V = \pi \int_a^b f(z)^2 \, dz$.

Lo anterior nos demuestra que importa más tener en claro el eje de rotación, que el plano coordenado sobre el que está la curva $\mathcal{C}$.

Ejemplo 8: Determinar el volumen de la rama superior del hiperboloide de revolución dado por S : $x^2 + y^2 - z^2 = -1$.

Vemos que aquí tenemos separados los términos $x^2 + y^2$ de z^2, así que el eje de rotación es el eje z.

Como queremos calcular el volumen de la rama superior, tomamos $z \geq 0$. Por otro lado, como la curva $\mathcal{C}$ directriz de la superficie, tiene que estar en un plano coordenado, buscamos la traza contenida en el plano yz, es decir $x = 0$.

Reemplazamos con $x = 0$ en la ecuación de la superficie y tendremos la curva $\mathcal{C} : y^z - z^2 = -1 \Rightarrow y^2 = z^2 - 1 \Rightarrow y = \sqrt{z^2 - 1}$. Luego deducimos que, $z \geq 1$.

Supongamos que consideramos el sólido hasta una altura $z = h$, luego, el volumen de la rama superior será $V = \pi \int_1^h \left(z^2 - 1\right) \, dz = \pi \left(\frac{h^3}{3} - h - \frac{1}{3} + 1\right)$

Ejemplo 9: Sea la superficie de revolución $S : x^2 + y^2 - \sqrt{2z} + z = 0$. Determinar el eje de rotación y una curva generatriz $\mathcal{C}$, y el volumen del sólido limitado por S.

Aquí una curva generatriz es $\mathcal{C} : y^2 = \sqrt{2z} - z$. Busquemos los límites de integración:

Sabemos que $\sqrt{2z}$ debe estar definida, entonces $z \geq 0$. Luego, tendremos también que

$$y^2 = \sqrt{2z} - z \geq 0 \Rightarrow \sqrt{2z} \geq z^2 \Rightarrow 2 \geq z$$

Y así obtuvimos los extremos de integración $0 \leq z \leq 2$.

Luego

$$V = \pi \int_0^2 \left(\sqrt{2z} - z\right) dz = \pi \left[\sqrt{2}\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} - \frac{z^2}{2}\right]_0^2 = \frac{2}{3}\pi$$

2.2 Volumen entre superficies

Consideremos ahora dos curvas contenidas en el plano xy, $\mathcal{C}_1 : y = f(x), z = 0$ y $\mathcal{C}_2 : y = g(x), z = 0$. Si giramos cada una, obtenemos dos sólidos de revolución S_1 y S_2. Si S_2 queda dentro de S_1, nos interesa saber cuánto volumen hay entre ellos (otra forma de verlo, buscamos determinar el volumen del sólido generado por rotar el área delimitada por $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$.

Supongamos que $g(x) < f(x)$ para $a \leq x \leq b$, entonces el volumen del sólido limitado por las superficies generadas por g y f se determina como

$$V = \pi \int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x)\right) \, dx = V_f - V_g.$$

De manera análoga a lo anterior, estas fórmulas se generalizan si $\mathcal{C}_{1,2}$ están dadas por funciones $f(y)$, $g(y)$ o $f(z)$, $g(z)$ y contenidas en los planos coordenados correspondientes.

Ejemplo 10: Hallar el volumen limitado por el paraboloide generado por la curva $y = \sqrt{x}$, y el cono generado por la recta $y = x$.

Vemos que las intersecciones se dan cuando $\sqrt{x} = x \Rightarrow x = 0, 1$. Y además $g(x) = x \leq \sqrt{x} = f(x)$ si $0 \leq x \leq 1$. Luego, el volumen buscado viene dado por la integral

$$V = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{x}^2 - x^2\right) \, dx = \pi \left[\frac{x}{2}\right]_0^1 - \pi \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \pi\frac{1}{2} - \pi\frac{1}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

2.3 Áreas de superficies de revolución

Nuevamente, lo imporante será reconocer el eje de rotación:

Sea una curva $\mathcal{C} : f(x)$ con $a \leq x \leq b$, contenida en el plano coordenado xz o xy, entonces el área de la superficie de revolución obtenida al girar $\mathcal{C}$ alrededor del eje x es

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} \, dx$$

Ejemplo 11: Hallar el área de la esfera de radio R.

Ya sabemos que es generada por rotación alrededor del eje x del semicírculo $\mathcal{C} : y = \sqrt{R^2 - x^2} = f(x)$, con $-R \leq x \leq R$.

Tendremos $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$, y $1 + \left(f'(x)\right)^2 = 1 + \dfrac{x^2}{R^2 - x^2} = \dfrac{R^2}{R^2 - x^2}$. Luego

$$V = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} \, dx = 2\pi R \int_{-R}^{R} dx = 4\pi R^2.$$

Ejemplo 12: Hallar el área del cóno de altura h, generado al rotar una recta ax alrededor del eje x.

Aquí $\mathcal{C} : f(x) = ax$, $0 \leq x \leq h$, y tendremos

$$V = 2\pi \int_0^h ax\sqrt{1+a^2}\,dx = 2\pi a\sqrt{1+a^2}\frac{h^2}{2} = a\sqrt{1+a^2}h^2$$

Notemos que hemos calculado el *área lateral* de la figura, sin considerar la tapa.

Ejemplo 13: Determinar la superficie del paraboloide generado por la curva $\mathcal{C} : f(x) = \sqrt{x}$, al girar alrededor del eje x, entre $0 \leq x \leq h$.

Tendremos que $1 + (f'(x))^2 = 1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4x} = \frac{4x+1}{4x}$. Luego

$$A = 2\pi \int_0^h \sqrt{x}\sqrt{\frac{4x+1}{4x}}\,dx = \pi \int_0^h \sqrt{1+4x}\,dx = \pi \left[\frac{1}{6}(1+4x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^h = \frac{\pi}{6}\left((1+2h)^{\frac{3}{2}} - 1\right)$$