Coordenadas esféricas y cilíndricas

Al igual que lo que ocurría en el plano, las coordenadas cartesianas o rectangulares, no siempre son las más adecuadas para representar objetos en el espacio.

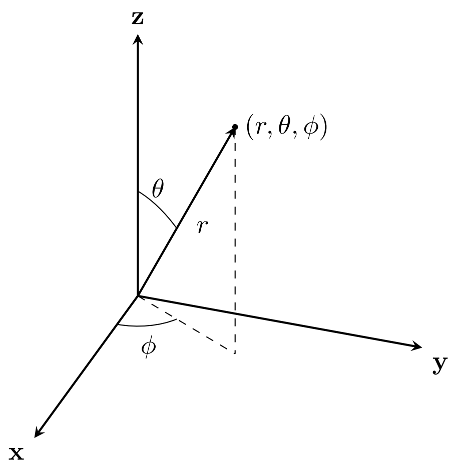
A continuación veremos dos formas de representar puntos y objetos en el espacio, que en cierto modo, generalizan las coordenadas polares del plano.

1 Coordenadas esféricas

El sistema de coordenadas esféricas1 se basa en la misma idea que las coordenadas polares y se utiliza para determinar la posición espacial de un punto mediante una distancia y dos ángulos.

Las *coordenadas esféricas* de un punto $P(r, \theta, \varphi)$ están determinadas por

- su distancia r al origen O (distancia *radial*).
- el ángulo θ entre el eje z y el vector $\overrightarrow{OP}$ que conecta el origen con el punto (ángulo *polar* o *colatitud*).
- el ángulo φ entre el eje x y la proyección de $\overrightarrow{OP}$ en el plano xy (ángulo *azimutal* o *acimut*).



Al igual que con las coordenadas polares en el plano, debemos acotar el valor de las coordenadas para obtener una representación unívocamente determinada:

Las coordenadas esféricas de un punto $P(r, \theta, \varphi)$ son *únicas* si

1. $r > 0$,
2. $\theta \in [0, \pi]$,
3. $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Aclaración sobre la notación: No existe una única forma de notar las coordenadas polares. Nosotros tomamos (r, θ, φ) siguiendo las normas ISO 80000-2:2019, siendo θ el ángulo polar y φ el acimut. Esta forma es habitual también en varios libros de física. Libros de cálculo de referencia como el Thomas o el Marsden usan la notación al revés (r, ϕ, θ), recurriendo al símbolo ϕ para el ángulo polar y θ para el acimut. Otros libros de importancia histórica como los de Rey Pastor, utilizan en vez del ángulo polar medido desde el eje z, su suplemento medido desde el piso y representado con la letra φ (denominado *ángulo copolar*). El mismo sistema se utiliza en el AutoCad2024. Finalmente, en este link pueden encontrarse un compendio de las distintas formas de escribir las coordenadas polares.

Nosotros usaremos el formato (r, θ, φ) que se indicó arriba, pero queda clara la *conveniencia de* **aprender** *adecuadamente los nombres 'ángulo polar' y 'acimut' -que son estándar- para hablar con propiedad y no depender tanto de símbolos como θ o φ, que son más arbitrarios en la literatura.*

1.1 Cambio a coordenadas rectangulares

El cambio de variables entre un sistema esférico $P(r, \theta, \varphi)$ y uno cartesiano $P(x, y, z)$ que comparten el origen, el eje z y el brazo azimutal (eje x), está dado por

1. $x = r\sin(\theta)\cos(\varphi)$, $\quad y = r\sin(\theta)\sin(\varphi)$, $\quad z = r\cos(\theta)$ (esféricas a cartesianas).
2. $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\quad \cos(\theta) = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\quad \tan(\varphi) = \dfrac{y}{x}$ con $x \neq 0$ (cartesianas a esféricas).

Observación sobre θ: Como en el rango $[0, \pi)$ en el que toma valores θ la función coseno es *biyectiva*, el resultado único de calcular $\theta = \arccos\left(\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$ está garantizado.

Observación sobre φ: Tal como ya vimos al estudiar las coordenas polares en el plano, dentro del rango $[0, 2\pi]$ siempre hay dos valores *distintos* $\varphi_1 \neq \varphi_2$ que comparten el valor de su tangente $\tan(\varphi_1) = \tan(\varphi_2)$, por eso debemos analizar el cuadrante del plano xy sobre el que se proyecta el punto $P(x, y, z)$.

Para obtener φ en el intervalo $[0, 2\pi)$, se deben usar el siguiente criterio (los cuadrantes referidos son los del plan xy):

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \quad \text{si} \quad x > 0, y \geq 0 \quad \text{(primer cuadrante)} \\ \dfrac{\pi}{2} \quad \text{si} \quad x = 0, y > 0 \\ \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) + \pi \quad \text{si} \quad x < 0 \quad \text{(segundo y tercer cuadrante)} \\ \dfrac{3}{2}\pi \quad \text{si} \quad x = 0, y < 0 \\ \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) + 2\pi \quad \text{si} \quad x > 0, y < 0 \quad \text{(cuarto cuadrante).} \end{cases}$$

Ejemplo 1: Dado el punto cartesiano $P = (x, y, z) = (1, \sqrt{3}, 2)$, queremos expresarlo en coordenadas esféricas (r, θ, φ).

Aplicando las fórmulas vistas:

$$r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{1+3+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$
$$\cos(\theta) = \frac{2}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$
$$\tan(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3} \text{ (primer cuadrante)}$$

Por lo tanto, las coordenadas esféricas del punto son:

$$P = \left(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$$

Ejemplo 2: Sea la siguiente superficie en coordenadas esféricas $S: 2\big(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\big) + \dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \dfrac{2\cos\theta}{r\sin^2\theta}$. Dar una expresión cartesiana y determinar el tipo de superficie.

Primero eliminaremos el denominador, multiplicando a ambos lados por $r\sin^2\theta$

$$r\sin^2\theta\Big(2\big(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\big) + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\Big) = r\sin^2\theta\left(\frac{2\cos\theta}{r\sin^2\theta}\right)$$
$$2r\sin^2\theta\big(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\big) + r\cos^2\theta = 2\cos\theta$$
$$2r\sin^2\theta\cos^2\varphi - 2r\sin^2\theta\sin^2\varphi + r\cos^2\theta = 2\cos\theta$$

Ahora, multiplicamos todo por r (para hacer aparecer el factor r^2 que necesitamos):

$$r\big(2r\sin^2\theta\cos^2\varphi - 2r\sin^2\theta\sin^2\varphi + r\cos^2\theta\big) = 2r\cos\theta$$
$$2\underbrace{r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi}_{x^2} - 2\underbrace{r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi}_{y^2} + \underbrace{r^2\cos^2\theta}_{z^2} = 2\underbrace{r\cos\theta}_{z}$$
$$2x^2 - 2y^2 + z^2 = 2z$$

Trabajamos, completando cuadrados en la última expresión y tendremos

$$2x^2 - 2y^2 + z^2 - 2z + 1 - 1 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 2y^2 + (z-1)^2 - 1 = 0$$

y obtenemos la ecuación de un hiperboloide de una hoja.

1.2 Algunas superficies en coordenadas esféricas

Ahora veremos cuáles son las superficies coordenadas (aquellas que se obtienen de dejar constante una varible) del sistema esférico:

$\mathbf{r} =$ **cte.:** Si el radio es constante, entonces al escribirlo en coordenadas cartesianas tendremos $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, es decir $r^2 = x^2+y^2+z^2$.

Luego, las superficie con r constante son esferas de radio r.

$\theta =$ **cte.:** Si la colalitud θ es constante, tomando la ecuación de cambio de variables correspondiente tendremos que $\cos(\theta) = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Notemos que si θ es una constante, también lo es $\cos(\theta)$.

Luego, podemos escribir

$$\underbrace{\cos(\theta)}_{\alpha}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = z \quad\Rightarrow\quad \alpha^2x^2 + \alpha^2y^2 = z^2,$$

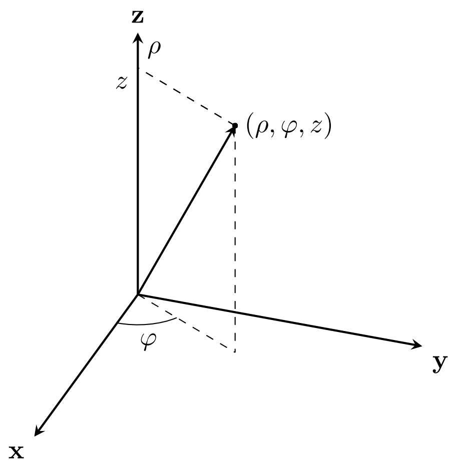
y obtuvimos la ecuación de un cono con vértice en O (notemos que nos quedamos con la parte superior del cono si $\theta < \frac{\pi}{2}$ y la inferior si $\theta > \frac{\pi}{2}$).

$\varphi =$ **cte:** Si el azimut φ es constante, tomando la ecuación correspondiente tendremos $\tan(\varphi) = \dfrac{y}{x}$, es decir $\tan(\varphi)x = y$, que es la ecuación de un plano que pasa por el origen, perpendicular al plano xy.

2 Coordenadas cilíndricas

Las *coordenadas cilíndricas* de un punto $P(\rho, \varphi, z)$ están determinadas por

- su distancia ρ del punto P al *eje z* (distancia *radial*).
- el ángulo φ entre el eje x y la proyección de $\overrightarrow{OP}$ en el plano xy (ángulo *azimutal* o *acimut*).
- la altura z del punto respecto del plano xy (altura signada).



Al igual que lo anteriormente hecho, debemos definir rangos adecuados para garantizar rangos únicos:

La representación cilíndrica de un punto $P(\rho, \varphi, z)$ es única si

1. $\rho > 0$,
2. $\varphi \in [0, \pi)$.

Observación importante: Los valores de las dos primeras variables (ρ, φ) son las *coordenadas polares* del punto P proyectado sobre el plano xy.

2.1 Cambio a coordenadas cartesianas

Notemos que debemos escribir un punto $P(\rho, \varphi, z)$ de la forma $P(x, y, z)$. Sabiendo que la tercer componente z se mantiene igual, y que las variables (ρ, φ) son las coordenadas polares de (x, y) obtenemos el siguiente *cambio de variables:*

Si el origen de coordenadas cartesianas y cilíndricas coinciden, y el *eje azimutal Ox* está sobre el semieje x positivo, el *cambio de coordenadas* de un punto $P(x, y, z) \equiv (\rho, \varphi, x)$ está dado por:

1. $x = \rho\cos(\varphi)$, $\quad y = \rho\sin(\varphi)$ (cilíndricas a cartesianas),
2. $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\quad \tan(\varphi) = \dfrac{y}{x}$, $x \neq 0$, (cartesianas a cilíndricas).

Observación: Para determinar el valor de φ a partir del cociente $\dfrac{y}{x}$ procedemos de la misma manera que para determinar el acimut de las coordenadas esféricas.

Ejemplo 3: Dado el punto cartesiano $P = (x, y, z) = (1, \sqrt{3}, 2)$, queremos expresarlo en coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z).

Notamos que el acimut de este punto, ya lo calculamos en el Ejemplo 1, y $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

Luego aplicamos la fórmula $\rho = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$

Por lo tanto, las coordenadas cilíndricas del punto son:

$$P = \left(2, \frac{\pi}{3}, 2\right).$$

2.2 Algunas superficies en coordenadas cilíndricas

Analizaremos cuáles son las superficies *coordenadas* del sistema cilíndrico.

$\rho =$ **cte:** En este caso, tomamos $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, lo que equivale a $\rho^2 = x^2 + y^2$, que representa un cilindro circular recto de radio r.

$\varphi =$ **cte.:** En este caso, tomando la correspondiente ecuación tendremos $\tan(\varphi) = \dfrac{y}{x}$, y obtenemos lo mismo que en las ecuaciones esféricas al considerar el azimut constante. La superficie resultante es un plano perpendicular al plano coordenado xy.

$\mathbf{z} =$ **cte.:** En este caso, al igual que en las coordenadas cartesianas, obtenemos un plano paralelo al "piso" (plano coordenado xy) de altura $z = z_0$.

Superficie de revolución: Sea S una superficie de revolución generada por una curva $\mathcal{C}$ contenida en el plano xz o yz que gira en torno al eje z (eje de rotación). Hemos visto que dicha superficie tiene como ecuación $S : f\left(\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0$.

Sabiendo que $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, obtenemos muy fácilmente la ecuación de la superficie de revolución en coordendas cilíndricas $S : f(\rho, z)$.

Así concluímos:

> Toda superficie en coordenadas cilíndricas cuya ecuación $S : f(\rho, z) = 0$ no contenga la variable φ representa una *superficie de revolución* en torno al eje z.