Cónicas

1 Lugar geométrico

Dada una ecuación $E(x, y) = 0$ se denomina *lugar geométrico* al conjunto de puntos $P(x, y)$ que satisfacen la ecuación.

En otras palabras, un punto $P(x_0, y_0)$ pertenecerá al lugar geométrico determinado por la ecuación $E(x, y) = 0$ si y solamente si $E(x_0, y_0) = 0$.

Ejemplo 1: El lugar geométrico determinado por la ecuación $y = mx + b$ es la recta de pendiente m y ordenada al origen b.

Ejemplo 2: Determinar si $P(1, 2)$ pertenece al lugar geométrico definido por $E(x, y) : x^3 - 2xy^2 + y^3 - 3y + 5 = 0$.

Reemplazamos el punto en la ecuación haciendo $x = 1$, $y = 2$ y tendremos $E(1, 2) = 1 - 2 \times 1 \times 4 + 8 - 3 \times 2 + 5 = 1 - 8 + 8 - 6 + 5 = -5 + 5 = 0$. Luego $P(1, 2)$ pertenece al lugar geométrico considerado.

Ejemplo 3: Describir el lugar geométrico definido por la ecuación $E(x, y) : x^2 - x - xy + y = 0$.

Para resolver el problema reescribimos la ecuación de la siguiente forma: $x^2 - x - xy + y = x(x - 1) - y(x - 1) = \underbrace{(x - y)}_{(1)}\underbrace{(x - 1)}_{(2)} = 0$.

El producto de los dos factores valores (1) y (2) será nulo si al menos alguno de ellos vale cero. Luego, los puntos $P(x, y)$ del lugar geométrico cumplen $x - y = 0$ o $x = 1$, es decir, el lugar geométrico es la unión de un par de rectas.

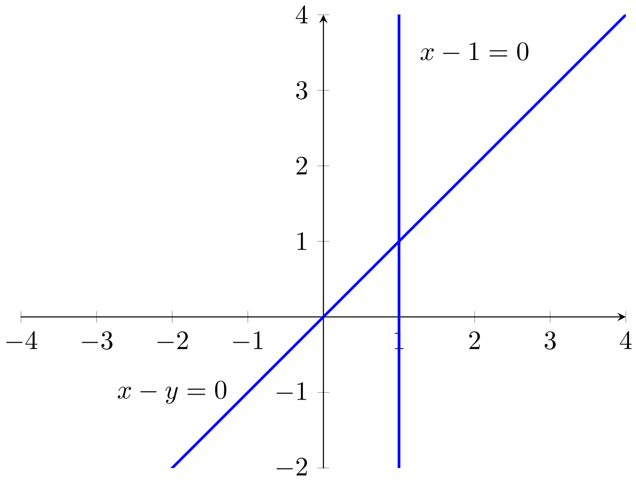


Figure 1: Lugar geométrico definido por $E(x, y) : x^2 - x - xy + y = 0$.

1.1 Distancia entre puntos

Una noción usualmente usada para describir lugares geométricos es la de distancia entre puntos:

> Definimos la *distancia* entre dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ como $d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Ejemplo 4: Describir el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de $A(0, 1)$ y $B(1, 2)$.

Notemos que en la consigna de arriba, no tenemos escrita explícitamente la ecuación $E(x, y) = 0$ que define el lugar geométrico, si no que la tenemos expresada en palabras, por lo que deberemos **traducirla al lenguaje algebraico**.

Sea $P(x, y)$ un punto que equidista de A y B, entonces vale $d(P, A) = d(P, B)$. Reemplazamos por la expresión de distancia y tendremos:

$$d(P, A) = d(P, B) \Rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2},$$

Luego, elevamos los dos términos de la igualdad al cuadrado:

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2}^2 = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}^2 \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 \Rightarrow 2y = -2x + 4 \Rightarrow y = -x + 2.$$

Luego, concluímos que el lugar geométrico es una recta.

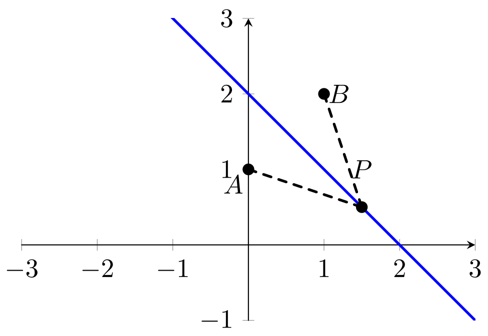


Figure 2: Lugar geométrico definido por $d(P, A) = d(P, B)$.

2 Lugares geométricos simétricos

A continuación veremos tres tipos de simetrías que podemos reconocer en un lugar geométrico determinado por una ecuación $E(x, y) = 0$.

2.1 Simetría respecto al eje y

> Si para todo punto $P(x, y)$ tal que $E(x, y) = 0$ vale que $E(-x, y) = 0$, entonces el lugar geométrico definido por $E(x, y) = 0$ es simétrico respecto al eje y.

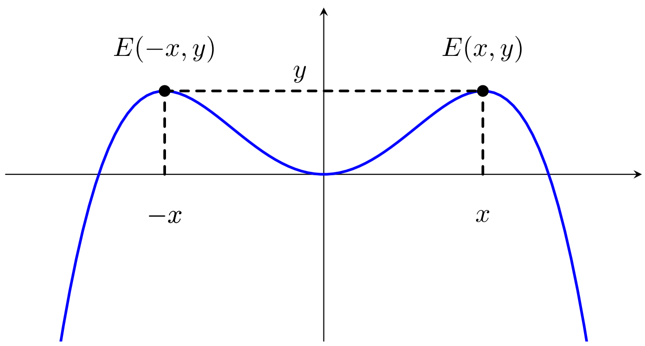


Figure 3: Lugar geométrico con simetría respecto al eje y.

Ejemplo 5: Mostrar que el lugar geométrico $E(x,y) : y - \dfrac{1}{1+x^2} = 0$ es simétrico respecto del eje y, mientras que $F(x,y) : x - \dfrac{1}{1+y^2} =$ y $G(x,y) : y - \frac{x}{1+x^2} = 0$ no lo son.

En la ecuación $E(x,y)$ reemplazamos x por $-x$, y obtenemos

$$E(-x,y) = y - \frac{1}{1+(-x)^2} = y - \frac{1}{1+(-1)^2x^2} = y - \frac{1}{1+x^2} = E(x,y).$$

Luego, el lugar geométrico $E(x,y) = 0$ es simétrico respecto del eje y.

Por otro lado, si hacemos el reemplazo $-x$ en $F(x,y)$ tendremos

$$F(-x,y) = (-x) - \frac{1}{1+y^2} \neq x - \frac{1}{1+y^2} = F(x,y), \quad \text{si} \quad x \neq 0.$$

Luego, el lugar geométrico $F(x,y) = 0$ no es simétrico respecto del eje y.

Análogamente, si hacemos el reemplazo $-X$ en $G(x,y)$ resulta:

$$G(-x,y) = y - \frac{(-x)}{(1+(-x)^2)} = y + \frac{x}{1+x^2} \neq y - \frac{x}{1+x^2} = G(x,y) \quad \text{si} \quad x \neq 0.$$

Luego, el lugar geométrico $G(x,y) = 0$ no es simétrico respecto del eje y.

2.2 Simetría respecto al eje x

Si para todo punto $P(x,y)$ tal que $E(x,y) = 0$ vale que $E(x,-y) = 0$, entonces el lugar geométrico definido por $E(x,y) = 0$ es simétrico respecto al eje x.

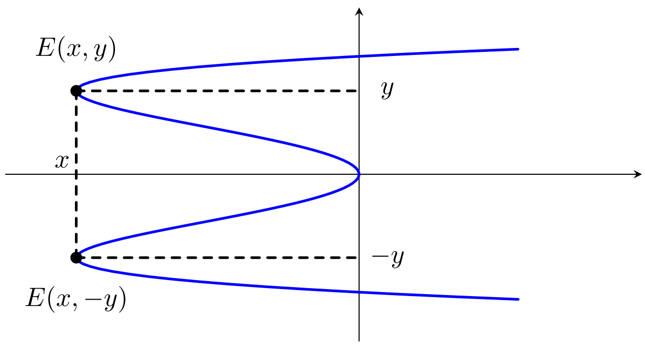


Figure 4: Lugar geométrico con simetría respecto al eje x.

Ejemplo 6: Sean $E(x, y)$, $F(x, y)$ y $G(x, y)$ como en el ejemplo anterior. Mostrar que el lugar geométrico definido por $F(x, y) = 0$ es simétrico respecto del eje x, mientras que los definidos por $E(x, y) = 0$ y $G(x, y) = 0$ no lo son.

Vemos que haciendo el reemplazo $-y$ en $F(x, y)$ obtenemos

$$F(x, -y) = x - \frac{1}{1 + (-y)^2} = x - \frac{1}{1 + (-1)^2 y^2} = x - \frac{1}{1 + y^2} = F(x, y),$$

luego el lugar geométrico $F(x, y) = 0$ es simétrico respecto del eje x.

Por otro lado, haciendo el reemplazo $-y$ en $E(x, y)$ tendremos:

$$E(x, -y) = -y - \frac{1}{1 + x^2} \neq y - \frac{1}{1 + x^2} = E(x, y) \quad \text{si} \quad y \neq 0,$$

luego el lugar geométrico $E(x, y) = 0$ no es simétrico respecto del eje x.

Finalmente, hacemos el reemplazo $-y$ en $G(x, y)$ y tendremos:

$$G(x, -y) = -y - \frac{x}{1 + x^2} \neq y - \frac{x}{1 + x^2} = G(x, y) \quad \text{si} \quad y \neq 0,$$

luego el lugar geométrico $G(x, y) = 0$ no es simétrico respecto del eje x.

2.3 Simetría respecto al origen O

Si para todo punto $P(x, y)$ tal que $E(x, y) = 0$, vale que $E(-x, -y) = 0$, entonces el lugar geométrico definido por $E(x, y) = 0$ es simétrico respecto al origen O.

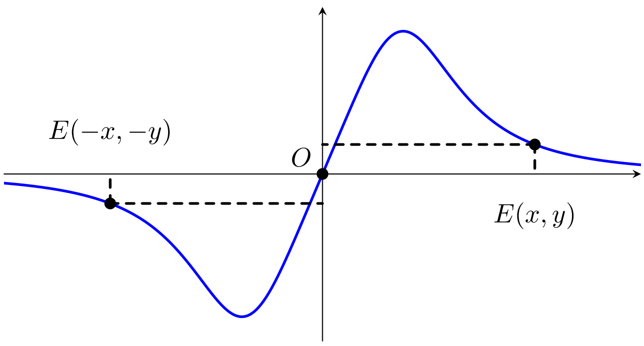


Figure 5: Lugar geométrico con simetría respecto al origen O.

Ejemplo 7: Sean $E(x, y)$, $F(x, y)$ y $G(x, y)$ como en el ejemplo anterior. Mostrar que el lugar geométrico definido por $G(x, y) = 0$ es simétrico respecto del origen O, mientras que los definidos por $E(x, y) = 0$ y $F(x, y) = 0$ no lo son.

Hacemos el reemplazo $-x$, $-y$ en $G(x, y)$ y obtenemos

$$G(-x, -y) = (-y) - \frac{-x}{1 + (-x)^2} = -\left(y - \frac{x}{1 + x^2}\right) = -G(x, y).$$

Luego el lugar geométrico $G(x, y) = 0$ es simétrico respecto al origen O.

En cambio, haciendo los cambios $-x$, $-y$ en $E(x, y)$ y $F(x, y)$ tendremos

$$E(-x, -y) = -y - \frac{1}{1 + (-x)^2} = -(y + \frac{1}{1 + x^2}) \neq \pm E(x, y) \quad \text{si} \quad y \neq 0.$$

por otro lado

$$F(-x,-y) = -x - \frac{1}{1+(-y)^2} = -(x + \frac{1}{1+y^2}) \neq \pm F(x,y) \quad \text{si} \quad x \neq 0.$$

Luego ni $E(x,y) = 0$ ni $F(x,y) = 0$ son simétricos respecto al origen.

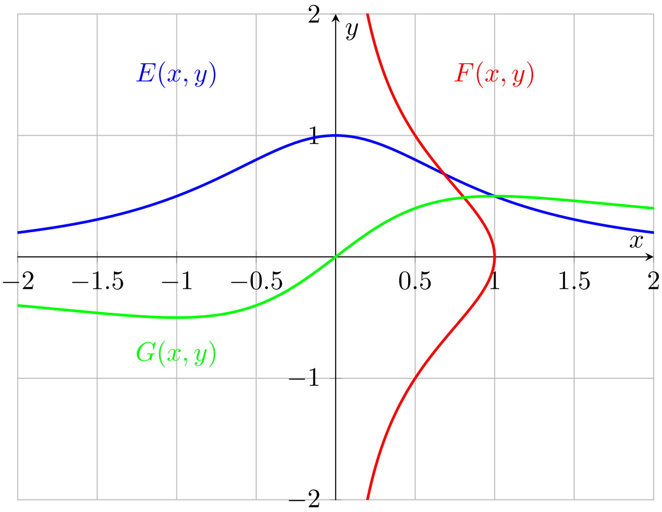


Figure 6: Lugares geométricos $E(x,y) = 0$ y $F(x,y) = 0$.

3 Cónicas

3.1 Circunferencia

Se denomina *circunferencia* al lugar geométrico formado por todos los puntos $P(x,y)$ del plano que equidistan de un punto fijo $C(h,k)$.

El punto $C(h,k)$ se denomina centro y la distancia $d(P,C) = r$ radio.

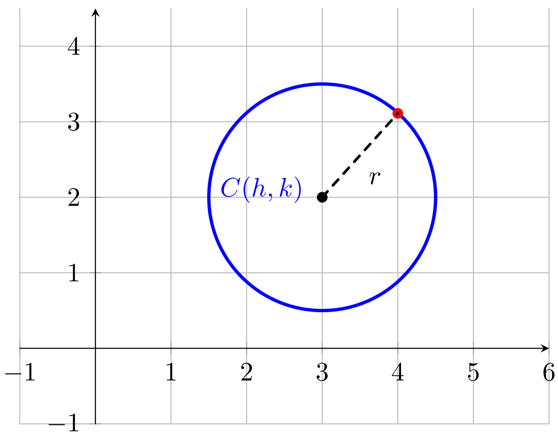


Figure 7: Cirfunferencia de centro $C(h,k)$ y radio r.

Sea $P(x,y)$ un punto de la circunferencia, entonces debe ocurrir

$$d(P,C) = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r \Rightarrow (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2.$$

Así obtuvimos la

Ecuación ordinaria de la circunferencia de centro $C(h, k)$ y radio r:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2.$$

Ejemplo 8: La ecuación $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$ representa la circunferencia de radio $r = 2$ y centro $C(3, 2)$.

Si el centro coincide con el origen, entonces $h = k = 0$, y tenemos la

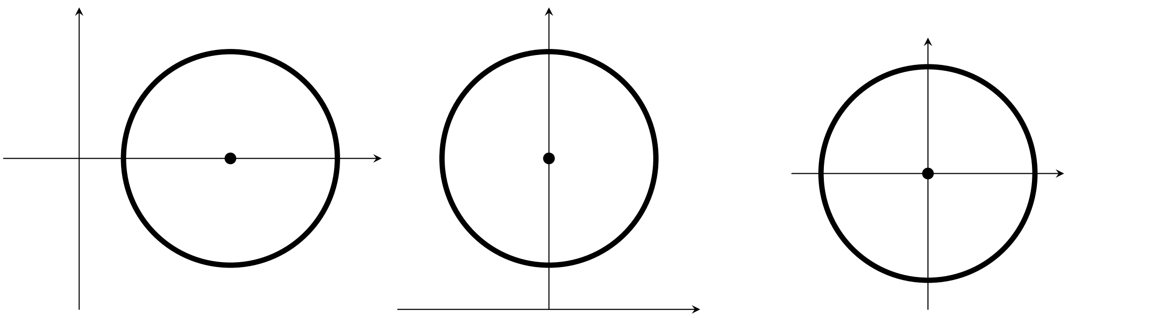
Ecuación canónica de la circunferencia de radio r:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

3.1.1 Geometría de la circunferencia

Valen las siguientes observaciones:
Una cirfunferencia será

1. simétrica respecto del eje y si su centro está sobre ese eje.
2. simétrica respecto del eje x si su centro está sobre ese eje.
3. simétrica respecto del origen si su centro coincide con O.



(a) Simetría respecto el eje x (b) Simetría respecto el eje y (c) Simetría respecto al origen O.

3.1.2 Tangente de la circunferencia

La ecuación de la tangente a la circunferencia de centro $C(h, k)$ y radio r que pasa por el punto $P(x_0, y_0)$ de la cirfunferencia, está dada por

$$(x_0 - h)(x - h) + (y_0 - k)(y - k) = r^2.$$

Donde $P(x, y)$ son puntos de la tangente.

Notemos que llamando $A = (x_0 - h)$, $B = (y_0 - k)$ $C = -\left(h(x_0 - h) + k(y_0 - k) + r^2\right)$, tenemos la ecuación implícita de la recta tangente en el punto $P(x_0, y_0)$ de la circunferencia.

Recordando un poco de teoría de las rectas, obtenemos que $\mathbf{n_0} = (A, B) = (x_0 - h, y_0 - k)$ es un *vector normal* a la circunferencia en el punto $P(x_0, y_0)$, y su dirección coincide con la del radio.

3.2 Elipse

Se denomina ***elipse*** al lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ del plano que satisfacen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0.$$

La expresión anterior se denomina *ecuación canónica* de la elipse.

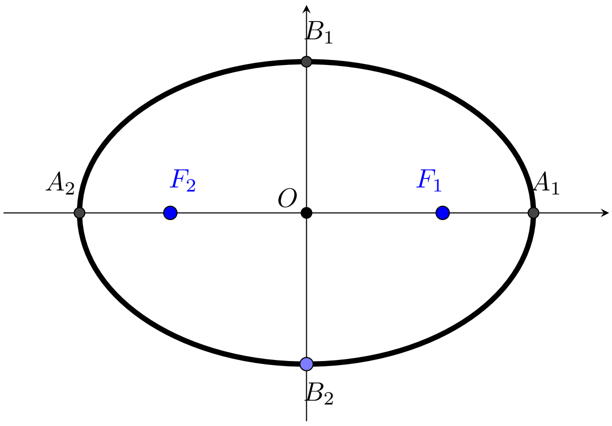


Figure 9: Imagen genérica de una elipse

Elementos de la elipse:

- O es el centro de la elipse.
- $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$, $B_1(0, b)$ y $B_2(0, -b)$ son los vértices.
- $\overline{A_1A_2}$ es el eje mayor.
- $\overline{B_1B_2}$ es el eje menor.
- si $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ (pidiendo $a > b$) definimos los *focos* $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$.
- el cociente $\dfrac{c}{a}$ se denomina *excentricidad*.

Caracterización: Una propiedad muy importante, y que distingue a la elipse es la siguiente:

Para todo punto $P(x, y)$ de la elipse, la suma de sus distancias a los focos F_1 y F_2 es constante e igual a $2a$.

Es decir, si $P(x, y)$ pertenece a la elipse con focos F_1 y F_2, no importa que punto hayamos tomado, siempre se verifica

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a.$$

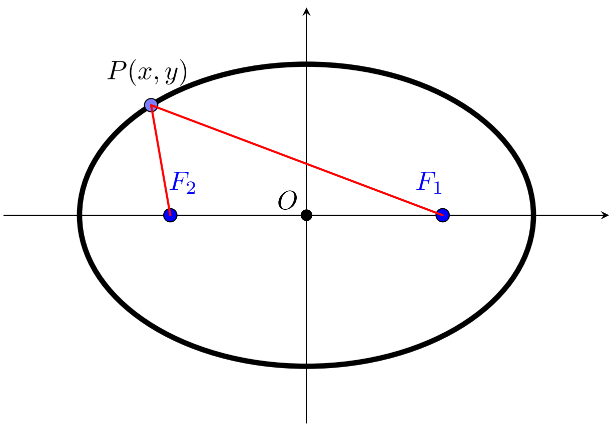


Figure 10: Propiedad focal de la elipse: $d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a$

Un caso particular e importante de la elipse es el siguiente:

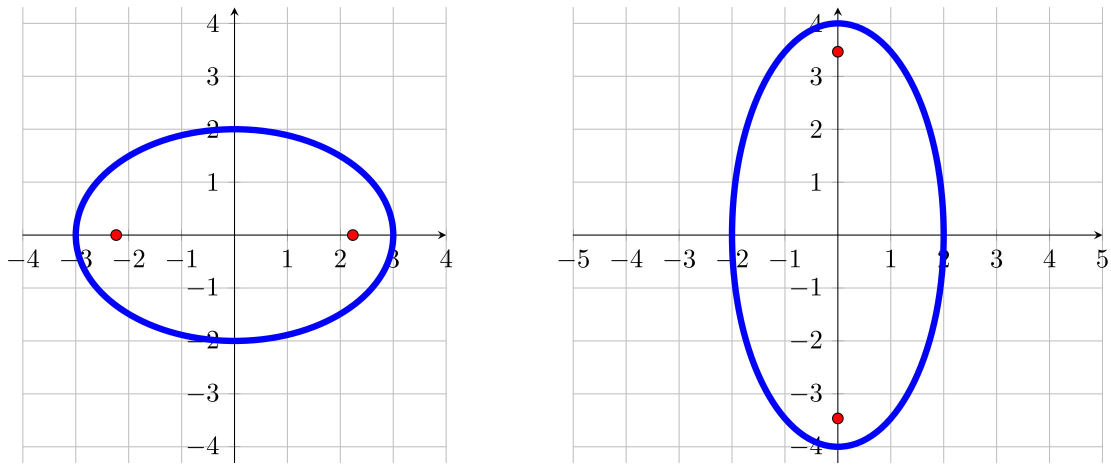
> Si $a=b$, entonces la elipse es una circunferencia de radio $r=a$, y los focos coinciden con el origen.

Caso $b>a$

Hasta ahora consideramos el caso en que $a>b$, y el eje mayor está sobre al eje horizontal.

Pero podría pasar que $b>a$, en tal caso, ahora el eje mayor será el segmento $\overline{B_1B_2}$, el eje menor será el segmento $\overline{A_1A_2}$, y los focos estarán sobre el eje mayor, y por lo tanto, alineados verticamente. Luego $F_1(0,c)$ y $F_2(0,-c)$, donde $c^2=b^2-a^2$. Y para todo punto $P(x,y)$ de la elipse valdrá $d(P,F_1)+d(P,F_2)=2b$.

Ejemplo 9: Grafiquemos las dos elipses $\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$ y $\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{4^2}=1$.



(a) Caso $a>b$, elipse $\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$.

(b) Caso $b>a$, elipse $\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{4^2}=1$.

3.2.1 Ecuación ordinaria de la elipse

Al igual que la circunferencia, la elipse puede tener su centro en un punto $C(h,k)$, entonces tenemos

Ecuación ordinaria de la elipse con centro en $C(h,k)$:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1, \quad a,b>0.$$

Si la elipse tiene su centro en $C(h,k)$, entonces

- los vértices estarán en $A_1(h+a,k)$, $A_2(h-a,k)$, $B_1(h,k+b)$, $B_2(h,k-b)$.
- los focos estarán en $F_1(h+c,k)$ y $F_2(h-c,k)$ si $a>b$.
- los focos estarán en $F_1(h,k+c)$ y $F_2(h,k-c)$ si $b>a$.

Ejemplo 10: Consideremos la elipse $\dfrac{(x-2)^2}{3^2}+\dfrac{(y-1)^2}{2^2}=1$.

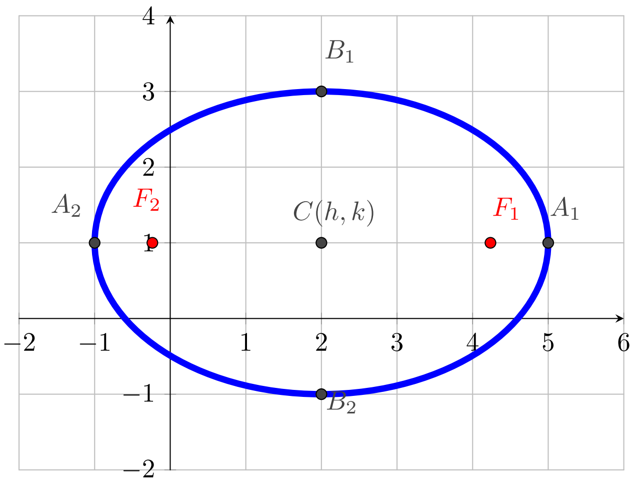
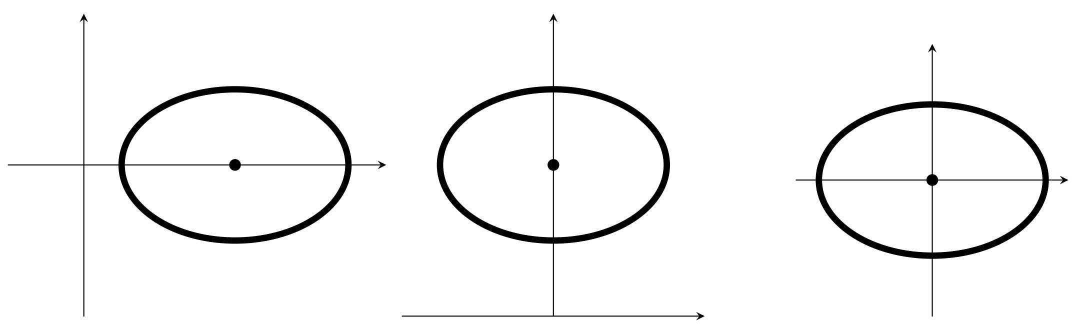


Figure 12: Elipse $\dfrac{(x-2)^2}{3^2}+\dfrac{(y-1)^2}{2^2}=1$.

3.2.2 Geometría de la elipse

Una elipse será

1. simétrica respecto del origen, si $C(h,k)=O$, es decir, si su centro coincide con O.
2. simétrica respecto del eje y si su centro está sobre ese eje.
3. simétrica respecto del eje x si su centro está sobre ese eje.



(a) Simetría respecto el eje x (b) Simetría respecto el eje y (c) Simetría respecto al origen O.

3.2.3 Ecuación de la tangente

La ecuación de la tangente en el punto $P(x_0, y_0)$ a la elipse con centro el $C(h, k)$ está dada por:

$$\frac{(x-h)(x_0-h)}{a^2} + \frac{(y-k)(y_0-k)}{b^2} = 1.$$

3.3 Parábola

Se denomina ***parábola*** al lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ que satisfacen

$$y = \frac{x^2}{4c}.$$

La expresión anterior se denomina *ecuación canónica* de la parábola.

Elementos de la parábola:

- La recta $r : y = -c$ se denomina *directriz.*
- El punto $F(0, c)$ se denomina *foco.*
- El punto $V(0, 0)$ se denomina *vértice*
- La recta que une V y F se denomina *eje focal* de la parábola.

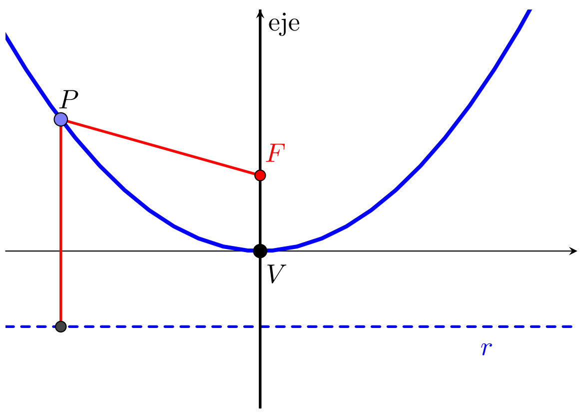


Figure 14: Parábola con eje focal vertical, elementos geométricos, y su propiedad focal $d(P, F) = d(P, r)$.

Caracterización: Una propiedad muy importante, y que distingue a la parábola es la siguiente:

Todo punto $P(x, y)$ de una parábola equidista de la directriz y el foco.

En otras palabras, un punto $P(x, y)$ de la parábola satisface $d(P, r) = d(P, F)$.

Foco sobre el eje x

Hasta ahora hemos considerado el caso en que el foco F está sobre el eje y, pero podría ocurrir que se halle en el eje x, en tal caso la parábola está dada por

Si el foco se encuentra sobre el eje x, la parábola está dada dada por

$$x = \frac{y^2}{4c}.$$

En este caso:

- El foco está en $F(c, 0)$.
- La directriz es la recta $r : x = -c$.
- El eje focal coincide con el eje x.
- El vértice sigue estando en el origen.

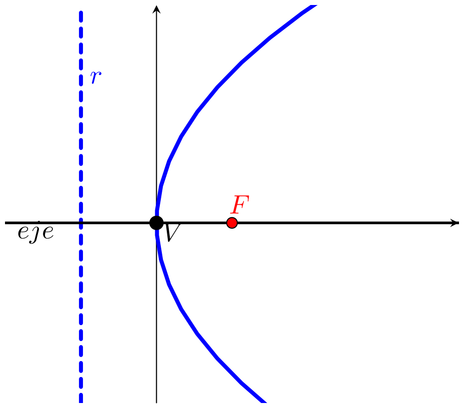


Figure 15: Parábola con eje focal horizontal

3.3.1 Ecuación ordinaria

Vimos los casos en que el vértice V está sobre en el origen, pero podría ocurrir que esté en un punto $V(h, k)$, tenemos así la

La *ecuación ordinaria* de la parábola con vértice en $V(h, k)$ y eje focal $x = h$ es:

$$y - k = \frac{(x - h)^2}{4c}.$$

Si el eje focal es $y = k$, la ecuación correspondiente es

$$x - h = \frac{(y - k)^2}{4c}.$$

Si el vértice está en $V(h, k)$ y el eje focal es vertical, entonces

- el eje focal coincide con $x = h$,
- el foco está en $F(h, k + c)$,
- La directriz es $r : y = k - c$.

Si el vértice está en $V(h, k)$ y el eje focal es horizontal, entonces

- el eje focal coincide con $y = k$,
- el foco está en $F(h + c, k)$,
- La directriz es $r : x = h - c$.

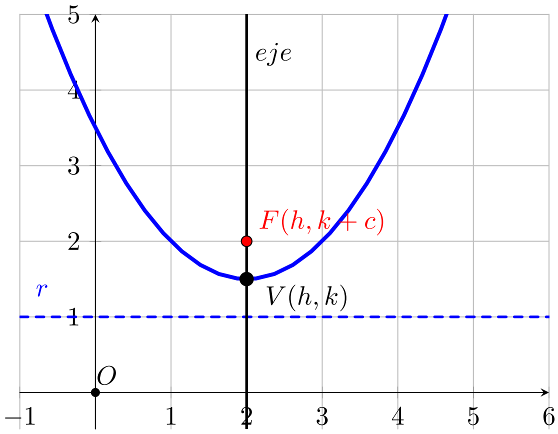


Figure 16: Parábola con vértice $V(2, 1.5)$, $y - 1.25 = \dfrac{(x-2)^2}{2}$, $c = 0.5$.

3.3.2 Simetrías

Dada una parábola con vértice $V(0, 0)$, entonces

- Si el foco está en el eje x, la parábola es simétrica respecto a ese eje.
- Si el foco está en el eje y, la parábola es simétrica respecto a ese eje.
- La parábola no es simétrica respecto del origen.

3.3.3 Tangente a la parábola

Dada la parábola con vértice en $V(h, k)$, la tangente por el punto $P(x_0, y_0)$ está dada por:

- si $y - k = \dfrac{(x-h)^2}{4c}$, entonces $y - y_0 = \dfrac{x_0 - h}{2c}(x - x_0)$.
- si $x - h = \dfrac{(y-k)^2}{4c}$, entonces $x - x_0 = \dfrac{y_0 - k}{2c}(y - y_0)$.

3.4 Hipérbola

Se denomina ***hipérbola*** al lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ que satisfacen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

La expresión anterior se denomina *ecuación canónica* de la hipérbola.

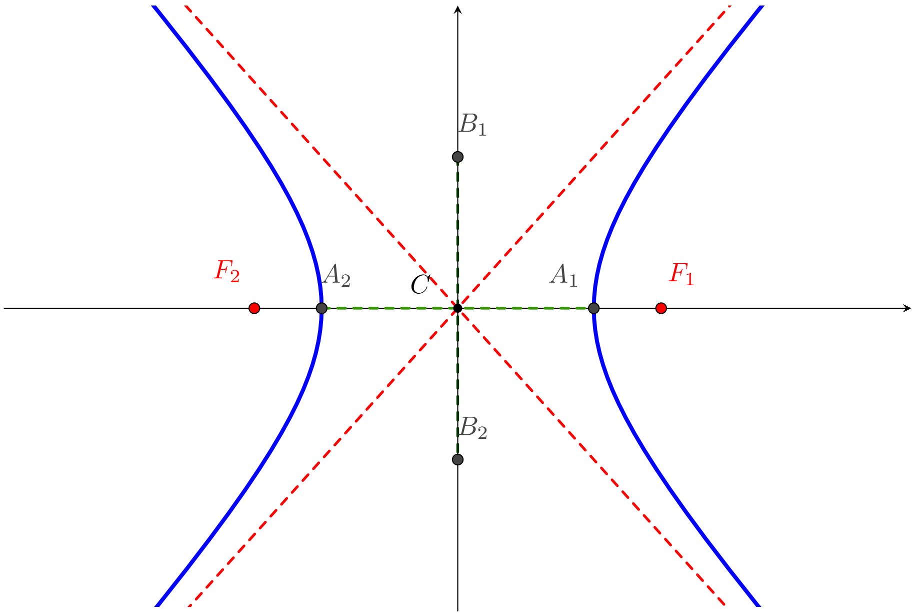


Figure 17: Hipérbola con eje focal horizontal.

Elementos geométricos de la hipérbola:

- O es el centro de la hipérbola.
- Los puntos $A_1(a, 0)$ y $A_2(-a, 0)$ son los vértices.
- El segmento $\overline{A_1A_2}$ se llama diámetro transverso.
- El segmento $\overline{B_1B_2}$, con $B_1(0, b)$ y $B_2(0, -b)$ es el diámetro no transverso.
- si $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, los puntos $F_1(c, 0)$ y $F_2(-c, 0)$ son los *focos*.
- el cociente $\frac{c}{a}$ se denomina excentricidad de la hipérbola.
- Las rectas $y = \dfrac{b}{a}x$ y $y = -\dfrac{b}{a}x$ son las asíntotas.

Dos observaciones:

1. La hipérbola tiene dos partes bien diferenciadas, llamadas *hojas*.
2. Como $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 > 0 \Rightarrow \dfrac{y^2}{b^2} < \dfrac{x^2}{a^2} \Rightarrow |\dfrac{y}{b}| < |\dfrac{x}{a}| \Rightarrow |y| < \dfrac{b}{a}|x|$.

Caracterización: Una propiedad muy importante, y que distingue a la hipérbola es la siguiente:

> Para todo punto $P(x, y)$ de una hipérbola, el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a los focos F_1 y F_2 es constante e igual a $2a$.

Es decir, si $P(x, y)$ pertenece a la hipérbola, no importa que punto hayamos tomado, se verifica que

$$|d(F_1, P) - d(F_2, P)| = 2a.$$

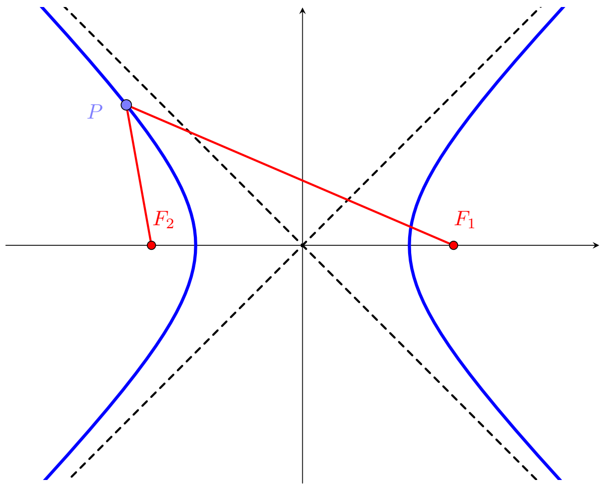


Figure 18: Propiedad focal de la hipérbola.

Un caso particular e importante es el siguiente :

Si $a = b$, la hipérbola se denomina *equilátera*, y las asíntotas coinciden con las rectas $y = \pm x$.

Caso de eje focal vertical

Hasta ahora consideramos el caso en que los focos y el diámetro transversal están sobre el eje horizontal.
Pero podría ocurrir que la ecuación intercambie el signo de la expresión, en ese caso

Si la hipérbola está dada por la ecuación $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$, tendrá sus focos sobre el eje vertical.

En ese caso, el diámetro transversal será el segmento $\overline{B_1B_2}$, y los focos estarán sobre el eje vertical en $F_1(0, c)$ y $F_2(0, -c)$. Y para todo punto $P(x, y)$ de la hipérbola valdrá $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2b$.

Las asíntotas seguirán siendo $y = \pm\dfrac{b}{a}x$.

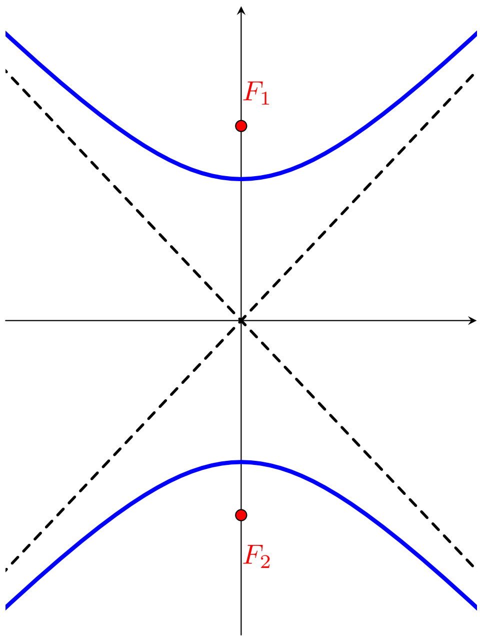


Figure 19: Hipérbola con eje focal vertical

3.4.1 Ecuación ordinaria de la hipérbola

Si su centro está en el punto $C(h, k)$, la hipérbola estará dada de la siguiente manera

Ecuación ordinaria de la hipérbola con centro en $C(h, k)$:

- $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ (eje focal horizontal).
- $\dfrac{(y-k)^2}{b^2} - \dfrac{(x-h)^2}{a^2} = 1$ (eje focal vertical).

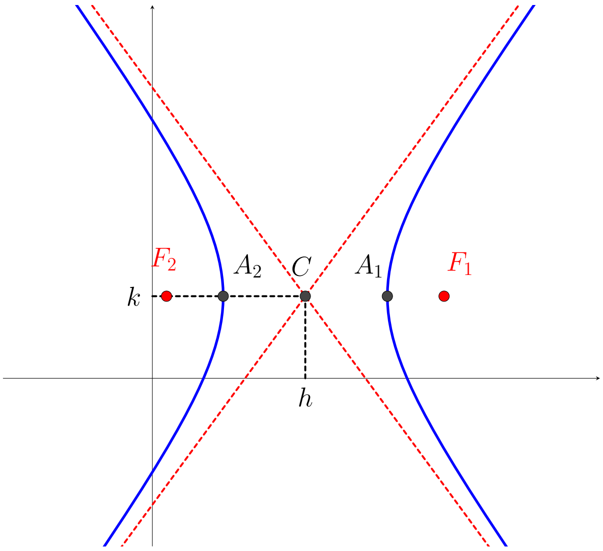


Figure 20: Hipérbola con centro $C(h, k)$.

En este caso

- Los focos estarán en $F_1(h-c, k)$, $F_2(h+c, k)$ si tenemos el eje focal horizontal.
- Los focos estarán en $F_1(h, k+c)$ y $F_2(h, k-c)$ si tenemos el eje focal vertical.
- Las asíntotas (en ambos casos) serán las rectas $y - k = \pm\dfrac{b}{a}(x-h)$.

3.5 Geometría de la hipérbola

Una hipérbola será

1. simétrica respecto del origen, si $C(h, k) = O$, es decir, si su centro coincide con O.
2. simétrica respecto del eje y si su centro está sobre ese eje.
3. simétrica respecto del eje x si su centro está sobre ese eje.

3.5.1 Tangente a la hipérbola

La tangente en el punto $P(x_0, y_0)$ a la hipérbola con centro en $C(h, k)$ está dada por:

- $\dfrac{(x-h)(x_0-h)}{a^2} - \dfrac{(y-k)(y_0-k)}{b^2} = 1$ (eje focal horizontal).
- $\dfrac{(y-k)(y_0-k)}{b^2} - \dfrac{(x-h)(x_0-h)}{a^2} = 1$ (eje focal vertical).

4 Ecuación general de las cónicas

Geométricamente, todas las cónicas se pueden obtener como la intersección de un plano y un cono.

Un cono tiene cuatro elementos destacados: la base, la generatriz, el eje (o altura) y el vértice. Si consideramos un cono, lo podemos cortar con un plano en distintas posiciones:

1. Si se corta con un plano *paralelo* a la base, resulta una circunferencia.
2. Si se corta con un plano *oblicuo* a la base, resulta la elipse.
3. Si se corta con un plano *paralelo* a la generatriz, resulta la parábola.
4. Si se corta con un plano *paralelo* al eje, resulta una hipérbola.

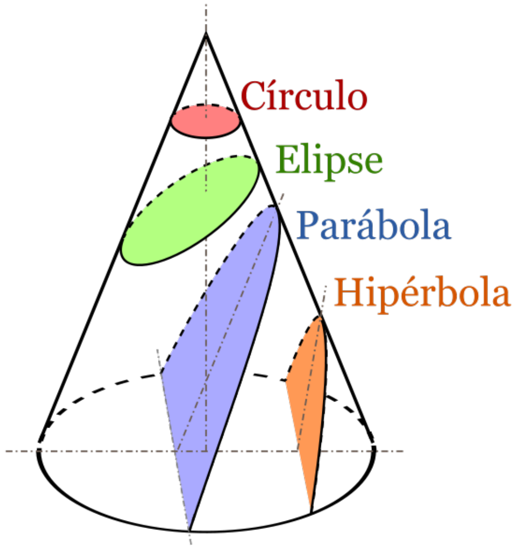


Figure 21: Secciones cónicas

El hecho de que todas las cónicas provengan del mismo objeto (el cono), hace sospechar que todas ellas podrían escribirse con una única ecuación.

4.1 Ecuación general de segundo grado en dos variables

Todas las cónicas pueden escribirse a través de la siguiente ecuación:

Ecuación general de segundo grado:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

La expresión anterior permite escribir todas las cónicas, inclyendo aquellas rotadas (que no veremos).

A nosotros nos interesará el caso en que el *término mixto* (también llamado *término rectangular*) no esté, es decir, el caso $C = 0$.

Ecuación general **incompleta** de segundo grado:

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Y esa ecuación permite describir todas las formas cónicas ya mencionadas.

Ejemplo 11: Escribir la siguiente elipse en forma general: $\dfrac{(x-2)^2}{3^2} + \dfrac{(y-1)^2}{5^2} = 1$

$$\begin{aligned}
&\frac{(x-2)^2}{3^2} + \frac{(y-1)^2}{5^2} = 1 \\
&\frac{x^2-4x+4}{9} + \frac{y^2-2y+1}{25} = 1 \\
&\frac{x^2}{9} - \frac{4}{9}x + \frac{4}{9} + \frac{y^2}{25} - \frac{2}{25}y + \frac{1}{25} = 1 \\
&\frac{x^2}{9} + \frac{1}{25}y^2 - \frac{4}{9}x - \frac{2}{25}y + \frac{4}{9} + \frac{1}{25} - 1 = 0 \\
&\underbrace{\frac{1}{9}}_{A} x^2 + \underbrace{\frac{1}{25}}_{B} y^2 + \underbrace{-\frac{4}{9}}_{D} x + \underbrace{-\frac{2}{25}}_{E} y + \underbrace{\frac{-116}{225}}_{F} = 0
\end{aligned}$$

Lo que nos va a interesar en particular, es dada una ecuación general en dos variables, determinar qué clase de cónica es.

Ejemplo 12: Determinar qué cónica es descripta por la siguiente ecuación: $2x^2+y^2-12x-4y+21=0$.

$$\begin{aligned}
&2x^2 + y^2 - 12x - 4y + 21 = 0 \\
&\left(2x^2 - 12x\right) + \left(y^2 - 4y\right) + 21 = 0 \\
&2\left(x^2 - 6x\right) + \left(y^2 - 4y\right) + 21 = 0 \\
&2\left(x^2 - 2\times 3x + 9 - 9\right) + \left(y^2 - 2\times 2y + 4 - 4\right) + 21 = 0 \\
&2\left((x-3)^2 - 9\right) + \left((y-2)^2 - 4\right) + 21 = 0 \\
&2(x-3)^2 + (y-2)^2 \underbrace{-18 - 4 + 21}_{=-1} = 0 \\
&\frac{(x-3)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + (y-2)^2 = 1.
\end{aligned}$$