Integral definida y áreas

1 Repaso: primitivas e integral indefinida

Dada una función de una variable independiente $y = F(x)$, ya se ha visto cómo se calcula su derivada

$$y' = F'(x) = \frac{dy}{dx}$$

y su diferencial

$$dy = F'(x)dx$$

o, lo que es lo mismo

$$dy = f(x)dx$$

donde $f(x) = F'(x)$.

Pero puede presentarse el problema inverso: dada la derivada $f(x)$, o el diferencial $f(x)dx$, hallar la función primitiva $F(x)$ cuya derivada es $f(x)$ o cuyo diferencial es $f(x)dx$.

Se denomina *primitiva* de $f(x)$ a toda función $F(x)$ que verifica $F'(x) = f(x)$.

Ejemplo 1: Si $f(x) = 2x$, entonces $F(x) = x^2 + 5$ es una primitiva de $f(x)$.

Ejemplo 2: Si $f(x) = 5\cos(x)$, entonces $F(x) = 5\sin(x) + 12$ y $G(x) = 5\sin(x) - 3$ es una primitiva de $f(x)$.

Dada $y = f(x)$, todas las primitivas de f difieren en una constante.

Es decir, si $F(x)$ y $G(x)$ son primitivas de f, entonces sabemos que existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) = G(x) + C$.

Lo anterior, nos permite escribir a las primitivas de una forma general a través de una nueva operación denominada *integración*:

Dada $f(x)$, representamos a todas sus primitivas como

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

la expresión anterior se denomina *integral indefinida de* $f(x)dx$.

Ejemplo 3: Si $f(x) = 2x$, sabemos que todas las primitivas de f se pueden escribir como $F(x) = x^2 + C$, entonces escribimos $\int f(x)\,dx = x^2 + C$.

Propiedades de la integral indefinida

Sean $f(x)$, $g(x)$ funciones, y $a \in \mathbb{R}$, entonces

1. $\displaystyle\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx.$
2. $\displaystyle\int a \cdot f(x)\, dx = a \cdot \int f(x)\, dx.$

Métodos de integración

Sean f, u funciones, F una primitiva de f y $du = u'dx$, entonces vale

$$\int f(u)\, \underbrace{u'(x)\, dx}_{du} = F(u(x)) + C \quad \text{(método de sustitución).}$$

Ejemplo 4: Calculemos $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ mediante sustitución.

Haciendo $1 - x^2 = u$, resulta $-2x\, dx = du$, o también $x\, dx = -\dfrac{du}{2}$. Si reemplazamos todo eso en la integral, tendremos

$$\int \frac{\overbrace{xdx}^{-du/2}}{\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\sqrt{u}}} = \int \frac{-1}{2\sqrt{u}} du = -\sqrt{u} + C = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

Si u, v son funciones si ponemos $du = u'dx$, $dv = v'dx$, entonces vale:

$$\int u dv = uv - \int v du \quad \text{(integración por partes).}$$

Ejemplo 5: Calcular $\displaystyle\int x\cos(x)\, dx.$

Considerando $x = u$ de donde $dx = du$, y $\cos(x)\, dx = dv$ de donde $\sin(x) = x$, se tiene

$$\int x\cos(x)\, dx = x\sin(x) - \int \sin(x)\, dx = x\sin(x) + \cos(x) + C$$

2 Integral Definida y áreas

Supongamos que tenemos una curva $y = f(x) \geq 0$, definida en el intervalor $[a, b]$, y queremos calcular el *área* bajo la curva (limitada por el eje x). Entonces podemos intentar hacer lo siguiente:

Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n partes iguales, mediante los puntos x_1,..., x_{n-1}, y consideramos $x_0 = a$ y $x_n = b$. Entonces $(x_i - x_{i-1}) = \Delta x$ para $i = 1, ..., n$.

Para cada subintervalo, formamos el rectángulo de altura $f(x_{i-1})$ y base $(x_i - x_{i-1})$. Luego, podemos sumar la superficie de todos esos rectángulos y tomarlos como aproximación al área:

$$A_{\text{aprox}} = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + ... + (x_n - x_{n-1})f(x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\Delta x} f(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x \, f(x_{i-1})$$

De esta manera, obtuvimos una primera aproximación al valor del área.

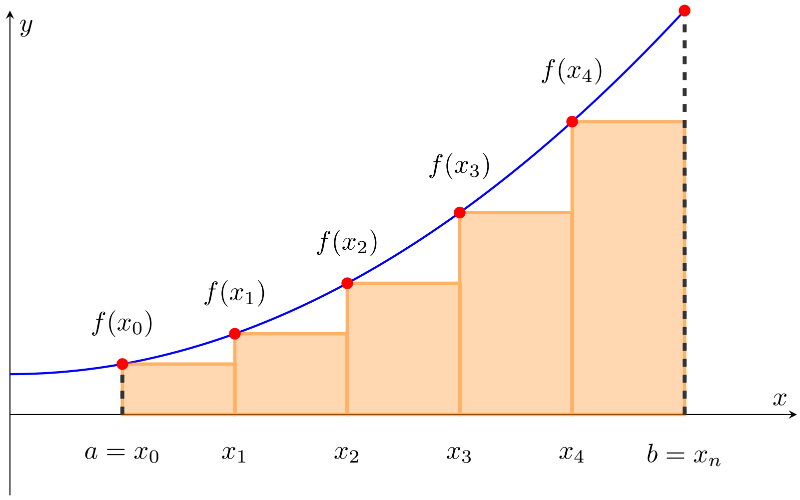


Figure 1: Método de exhausción

Intuitivamente, podemos ver que si hacemos la división del intervalo más fina (incrementando la cantidad n de partes), entonces nos aproximamos mejor al área. Esa aproximación, se expresa a través de un límite.

Dada $y = f(x)$, la *integral definida de* $f(x)$ *entre* a *y* b es el límite

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \, f(x_{i-1}) = \int_a^b f(x) dx,$$

Calculemos algunas integrales definidas:

Ejemplo 6: Sea $y = x$ definida en el intervalo $[0, 1]$, calculemos su integral definida sobre dicho intervalo.

Para ello dividamos este intervalo en n partes iguales mediante los puntos:

$$x_0 = 0, \, x_1 = \frac{1}{n}, \, x_2 = \frac{2}{n}, \, ..., x_n = \frac{n}{n} = 1$$

Ahora formemos la suma

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n^2} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (i-1)}_{\substack{\text{progresión} \\ \text{aritmética}}} = \frac{1}{n^2} \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Tomando el límite tendremos

$$\int_0^1 x \, dx = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$$

Vemos que en este caso, la integral definida da el área del triángulo rectángulo de vértices $(0,0), (0,1), (1,0)$.

Ejemplo 7: Sea $y = x^2$ en el mismo intervalo, y la misma división que en el ejemplo anterior. Calculemos la integral definida:

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{(i-1)}{n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 = \frac{1}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Luego

$$\int_0^1 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}$$

Y el valor de la integral definida represena el área bajo la parábola en el intervalo $[0,1]$.

Además la integral definida tiene las siguientes propiedades que a veces, ayudan en los cálculos.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones, y $a < c < b$, la integral definida tiene las siguientes propiedades:

1. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0,$
2. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx,$
3. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$

Ejemplo 8: Sea $f(x) = |x-2|$, calculemos $\int_0^3 f(x)\,dx$.

Primero observamos que podemos escribir $f(x) = \begin{cases} -(x-2) \text{ si } x \le 2 \\ (x-2) \text{ si } x > 2 \end{cases}$.

Luego, por la propiedad 3 de las integrales definidas, podemos partir la evaluación en el intervalo $[0,3]$ como $\displaystyle\int_0^3 = \int_0^2 + \int_2^3 = I_1 + I_2$.

Cálculo de I_1: dividimos el intervalo $[0,2]$ haciendo $x_0 = 0$, $x_1 = 2\left(\frac{1}{n}\right)$, ..., $x_n = 2\left(\frac{n}{n}\right) = 2$, entonces

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}\left(2-2\frac{i-1}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n}4\frac{1}{n}\left(1-\frac{i-1}{n}\right) \\ &= 4\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{n-(i-1)}{n}\right) = 4\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}n - \sum_{i=1}^{n}(i-1)\right) \\ &= 4\frac{1}{n^2}\left(n^2 - \frac{n(n-1)}{2}\right) = 4\left(1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right) = 4-2+2\frac{1}{n} = 2+2\frac{1}{n} \end{aligned}$$

Luego $I_1 = \lim\limits_{n\to\infty} 2 + 2\frac{1}{n} = 2$.

Cálculo de I_2: dividimos el intervalo $[2,3]$ haciendo $x_0 = 2$, $x_1 = 2 + \frac{1}{n}$, ..., $x_n = 2 + \frac{n}{n} = 3$, luego

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(2+\frac{(i-1)}{n}-2\right) \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{(i-1)}{n}}_{\text{ejemplo 6}} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} = I_2 \end{aligned}$$

Así $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$

3 Regla de Barrow

Si queremos calcular una integral definida, deseamos un camino más sencillo que el método de *exhausción* utilizado anteriormente.

Sea $y = f(x)$ una función, y $F(x)$ una primitiva, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b \qquad \text{(regla de Barrow)}$$

La *regla de Barrow*nos indica que el cálculo de integrales definidas, se reduce al de hallar primitivas (integral indefinida) y evaluarlas adecuadamente.

Ejemplo 9: Calcular la integral definida $I = \displaystyle\int_{-2}^3 x^2\,dx.$

Aplicamos la regla de Barrow a $f(x) = x^2$, y buscamos una primitiva: $F(x) = \dfrac{x^3}{3}.$

Luego $\displaystyle\int_{-2}^3 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^3 = \frac{27}{3} - \frac{-8}{3} = \frac{35}{3}$

Ejemplo 10: Calcular $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(x)\,dx.$

Aplicamos la regla de Barrow a $f(x) = \sin(x)$, y buscamos una primitiva $F(x) = \cos(x)$.

Luego $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(x)\,dx = [\cos(x)]_0^{2\pi} = \cos(2\pi) - \cos(0) = 1 - 1 = 0.$

3.0.1 Recapitulación

En los ejemplos 6-9, los resultados de las integrales definidas (en los intervalos correspondientes) coinciden con las áreas entre la eje x y la curva $y = f(x)$. La razón es sencilla de ver: notemos que en todos estos casos $f(x) \geq 0$, por lo que es claro que la construcción con rectángulos (conocida como *método de exhaución*) debe aproximar el cálculo del área.

Sin embargo, si $f(x)$ toma valores negativos, la construcción realizada con los rectángulos y el límite siguen teniendo sentido, y por lo tanto la integral definida en el intervalo sigue perfectamente definida. Pero la equivalencia con el área ya no es cierta. Eso es lo que ilustra el ejemplo 10.

En resumen, siempre hay que tener en cuenta que:

La *integral definida* en un intervalo **NO** siempre da el valor del área.

3.1 Cambio de extremos

Cuando utilizamos el método de sustitución para resolver una integral, a menudo resulta más sencillo evaluar en nuevos extremos (cambio de variables mediante) que en los originales.

Sean $f(x)$, $u(x)$ funciones y $F(x)$ una primitiva de f, entonces:

$$\int_{x_1}^{x_2} f\left(u\left(x\right)\right) u'(x)\, dx = \left[F(u)\right]_{u_1}^{u_2},$$

donde $u_1 = u(x_1)$ y $u_2 = u(x_2)$.

Ejemplo 11: Calculemos la integral $I = \displaystyle\int_0^3 \sqrt{3^2 - x^2}\, dx$

Primero intentemos encontrar una primitiva de $f(x) = \sqrt{3^2 - x^2}$. Haciendo $x = 3\sin(u) \Rightarrow dx = 3\cos(u)du$ tendremos

$$\int \sqrt{3^2 - x^2}\, dx = \int \sqrt{3^2 - 3^2 \sin^2(u)}\, 3\cos(u)du = 3^2 \int \cos^2(u)du = \frac{3^2}{2}\left(\sin(u)\cos(u) + u\right)$$

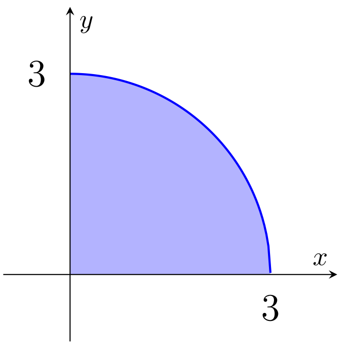
Deshaciendo el cambio de variables tendremos $\cos(u) = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{3^2}} = \dfrac{1}{3}\sqrt{3^2 - x^2}$ y $x = 3\sin(u) \Rightarrow \arcsin\left(\dfrac{x}{3}\right) = u$. Reemplazando tendremos

$$\int \sqrt{3^2 - x^2}\, dx = \frac{3^2}{2}\left(\frac{x}{3^2}\sqrt{3^2 - x^2} + \arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\right)$$

Luego evaluamos

$$I = \left[\frac{1}{2}\left(x\sqrt{3^2 - x^2} + 3^2 \arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\right)\right]_0^3 = \frac{1}{2}(3 \times 0 + 9\arcsin(1)) - \frac{1}{2}(0 \times 3 + 9\arcsin(0)) = \frac{1}{2}9\frac{\pi}{2} = \frac{9}{4}\pi$$

Notemos que lo que calculamos fue el área del cuarto de círculo.



Aunque resulta más cómodo hacer los siguientes cambios:

si $x = 3\sin(u)$, entonces $x_0 = 0 = 3\sin(u_0) \Rightarrow u_0 = 0$ o $x_1 = 3 = 3\sin(u_1) \Rightarrow u_1 = \dfrac{\pi}{2}$, luego

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, dx = \left[\frac{3^2}{2}\left(\sin(u)\cos(u) + u\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0 - \cos(0)\sin(0)\right) = \frac{9}{4}\pi.$$

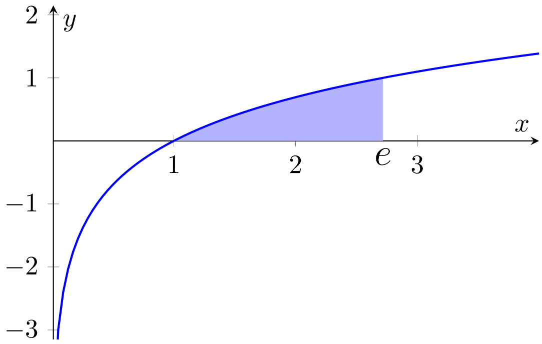
4 Cálculo de áreas en coordenadas cartesianas

Ya hemos visto que una integral definida no siempre da el valor de un área, sin embargo, procediendo de manera adecuada podemos utilizarla para calcular el área entre dos curvas.

Sean $y = f(x)$ y $y = g(x)$ funciones tales que $g(x) \leq f(x)$ sobre $[a, b]$, entonces el área limitada por las curvas y las rectas $x = a$ y $x = b$ está dada por

$$A = \int_a^b \underbrace{(f(x) - g(x))}_{\text{techo-piso}} \, dx$$

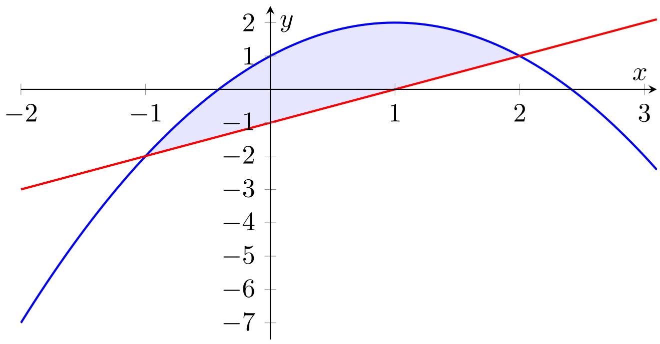
Ejemplo 12: Supongamos que deseamos hallar el área entre la curva $y = \ln(x)$ y el eje x, entre los valores $1 \leq x \leq e$.



Entonces $f(x) = \ln(x)$ (será el "techo"), y tomamos el eje x dado por $g(x) = 0$ (será el "piso"). Luego el área correspondiente estará dada por:

$$\int_1^e \ln(x) \, dx = [x(\ln(x) - 1]_1^e = e(\ln(e) - 1) - 1(\ln(1) - 1) = 1.$$

Ejemplo 13: Determinar el área encerrada por la parábola $y = 1 + 2x - x^2$ y la cuerda que une los puntos $P_0(-1, -2)$ y $P_1(2, 1)$.

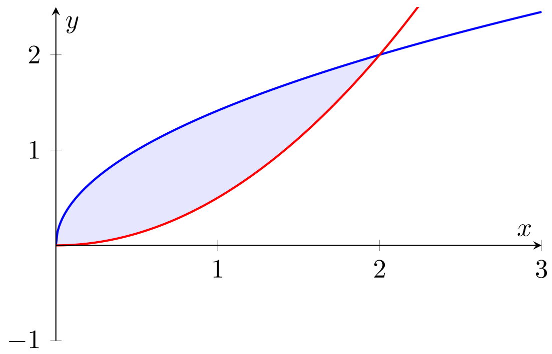


Determinamos la ecuación de la recta $y = mx + b$ y tendremos $m = \dfrac{1 - (-2)}{2 - (-1)} = 1$ y $-1 + b = -2 \Rightarrow b = -2 + 1 = -1$, luego la recta es $y = x - 1$.

Gráficamente vemos que $f(x) = 1 + 2x - x^2 \geq x - 1 = g(x)$ entre los puntos de intersección dados por $x_0 = -1$ y $x_1 = 2$. Luego el área está dada por la integral definida

$$\int_{-1}^2 (1 + 2x - x^2 - (x - 1)) \, dx = \int_{-1}^2 (2 + x - x^2) \, dx = \left[2x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^2 = \frac{9}{2}.$$

Ejemplo 14: Calcular el área comprendida entre las parábolas $y^2 = 2x$ y $x^2 = 2y$.



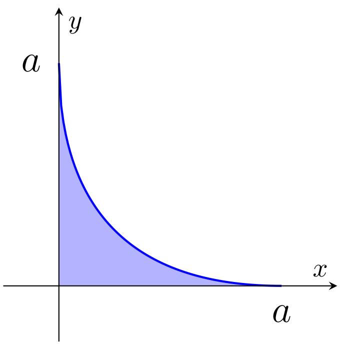
Notemos que las parábolas se cortan entre los puntos $x = 0$ y $x = 2$, y además la primer parábola la podemos escribir como $y = \sqrt{2x}$ en el intervalo $[0, 2]$.

La gráfica nos muestra que $f(x) = \sqrt{2x} \geq \frac{1}{2}x^2 = g(x)$, luego el área buscada será

$$A = \int_0^2 \left(\sqrt{2x} - \frac{1}{2}x^2\right)\, dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6}x^2\right]_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Ejemplo 15: Calcular el área entre el lugar geométrico $\sqrt{y} + \sqrt{x} = \sqrt{a}$ y los ejes coordenados.

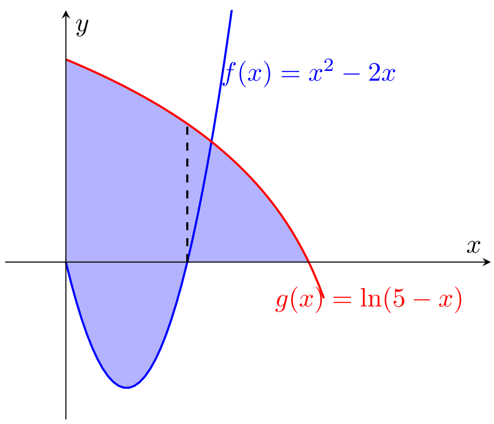
Notemos que $x, y \leq 0$ para que la raíz tenga sentido. Y también que $0 \leq x\,, y \leq \sqrt{a}$.



Podemos escribir $\sqrt{y} = \sqrt{a} - \sqrt{x} \Rightarrow y = \left(\sqrt{a} - \sqrt{x}\right)^2 = a - 2\sqrt{a}\sqrt{x} + x$, luego el área buscada estará dada por

$$\int_0^a \left(a - 2\sqrt{a}\sqrt{x} + x\right)\, dx = \left[ax - 2\sqrt{a}\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^2\right]_0^a = \frac{1}{6}a^2.$$

Ejemplo 16: (Cálculo mediante subáreas) Determinar el área pintada de azul.



Observamos que el área total A la podemos ver como la suma de dos subáreas:$A = A_1 + A_2$, donde A_1 es el subárea a la izquierda de la línea punteada y A_2 la de la derecha. Determinemos los límites de cada una y su valor:

• Área A_1: Notemos que $f(x) = x(x-2)$ tiene raíces en $x = 0, 2$. Luego el área A_1 tiene como techo a la función $g(x)$ y como piso a $f(x)$ con $0 \leq x \leq 2$. Luego

$$A_1 = \int_0^2 \big(\ln(5-x) - (x^2 - 2x)\big)dx.$$

Una primitiva de de $g(x)$ (obtenida por substitución) es $G(x) = -(5-x)\ln(5-x) - x$, y una primitiva de $f(x)$ es $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2$. Luego

$$A_1 = G(2) - F(2) - \big(G(0) - F(0)\big) = -3\ln(3) - 2 - \frac{8}{3} + 4 + 5\ln(5) = 5\ln(5) - 3\ln(3) - \frac{2}{3}.$$

• Área de A_2: Notemos que $g(x) = 0$ para $x = 4$. Luego, A_2 tiene como techo a $g(x)$ y como piso a 0 con $2 \leq x \leq 4$. Así

$$A_2 = \int_2^4 \ln(5-x)dx = \big(G(4) - G(2)\big) = -1\ln(1) - 4 + 3\ln(3) + 2 = 3\ln(3) - 2$$

Así $A = A_1 + A_2 = 5\ln(5) - 3\ln(3) - \dfrac{2}{3} + 3\ln(3) - 2 = 5\ln(5) - \dfrac{8}{3}$.

4.1 Integración respecto del eje y

Planteando la integral adecuadamente, podemos simplificar el cálculo de áreas recurriendo a la integral respecto de la variable y.

Sean $x = f(y)$ y $x = g(y)$ funciones tales que $g(y) \leq f(y)$ sobre $[a, b]$, entonces el área limitada por las curvas y las rectas $y = a$ y $y = b$ está dada por

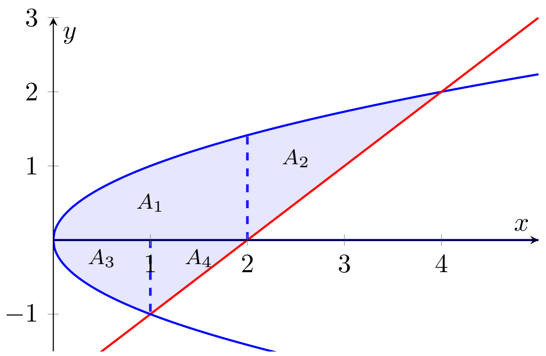
$$A = \int_a^b (f(y) - g(y))\,dy$$

Ejemplo 17: Calcular el área encerrada por las siguientes curvas $\begin{cases} y^2 = x \\ x - y = 2 \end{cases}$

En primer lugar, encontramos los puntos de intersección igualando $y^2 = x$ y $x = 2 + y$, luego

$$y^2 = 2 + y \Rightarrow y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow y_1 = -1\,, y_2 = 2$$

Luego, las curvas se cortan en $P_0(1, -1)$ y $P_1(2, 4)$.



Para calcular el área una opción es seccionar la región en cuatro subáreas (tomando $y = \pm\sqrt{x}$):

1. La limitada por $\sqrt{x}$ (arriba), el eje x (abajo), entre $0 \leq x \leq 2$
2. La limitada por $\sqrt{x}$ (arriba), $x-2=y$ (abajo), entre $2 \leq x \leq 4$.
3. La limitada por el eje x (arriba), $y=-\sqrt{x}$ (abajo), entre $0 \leq x \leq 1$.
4. La limitada por el eje x (arriba), $y=x-2$ (abajo), entre $1 \leq x \leq 2$.

Así tendremos el valor del área expresado como la suma de cuatro integrales definidas $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$, donde

$$A_1 = \int_0^2 \sqrt{x}\, dx, \qquad A_2 = \int_2^4 (\sqrt{x} - x + 2)\, dx, \qquad A_3 = \int_0^1 \sqrt{x}\, dx, \qquad A_4 = \int_1^2 (2-x)\, dx.$$

Sin embargo hay un camino más sencillo: si "rotamos" todo 90, podemos tomar como variable independiente a y, y aplicamos la fórmula "techo-piso".

Tomamos $f(y) = y+2$ y $g(y) = y^2$, y vemos que en el área en consideración se verifica $-1 \leq y \leq 2$, luego $A = \displaystyle\int_{-1}^{2} (y+2-y^2)\, dy = \left[\frac{1}{2}y^2 + 2y - \frac{1}{3}y^3\right]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$.