Vectores y rectas en el espacio

1 Coordenadas rectangulares espaciales

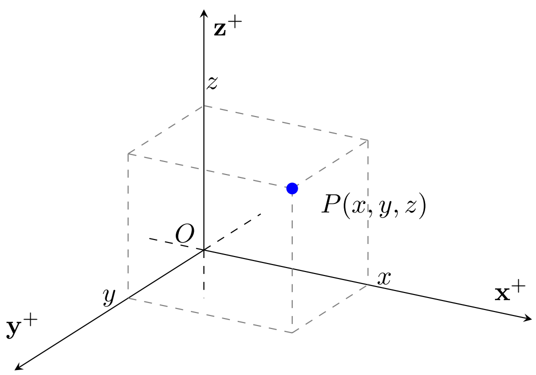
Hasta ahora, hemos utilizado sistemas de coordenadas que permitían representar puntos y lugares geométricos en el plano. En esta sección generalizaremos las coordenadas rectangulares para localizar objetos en el espacio.

Recordemos que los puntos de un plano pueden representarse como *pares* $P(x, y)$, de números y graficarse respecto de dos rectas perpendiculares (denominadas *ejes*), de manera análoga ocurrirá en el espacio:

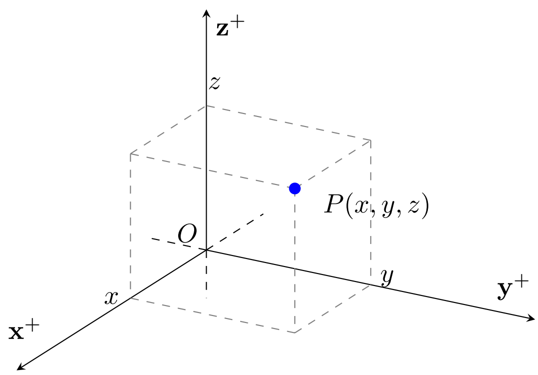
> Los puntos del espacio pueden representarse como *ternas* $P(x, y, z)$ y graficarse repecto de **tres** rectas perpendiculares entre sí (que serán el *eje* **x**, el *eje* **y** y el *eje* **z**).

Al igual que con el caso bidimensional, la intersección de los tres ejes será un punto que se denomina *origen*, y se presenta con O.

Fijado el origen O, tenemos que determinar qué parte de cada eje tiene sentido positivo y cual negativo. En el caso del plano (que tiene solamente dos ejes), se toman como positivos el lado derecho del eje horizontal y la parte superior del vertical, sin embargo, al considerar tres ejes, esta fijación puede hacerse de dos modos distintos:



(a) Sistema izquierdo.



(b) Sistema derecho.

Figure 1: Posibles sistemas de representación rectangular (cartesiana) del espacio.

El primer sistema de la figura 1a se denomina **izquierdo**, *inverso, sinistrorsum* o *levógiro.* El segundo sistema de la figura 1b se denomina **derecho**, *directo, destrorsum* o *destrógiro.* Este último es el que utilizaremos.

1.1 Planos coordenados y octantes

Cada pareja de ejes coordenados determinan un plano, denominado *plano coordenado.* Tenemos tres de ellos: *plano xy*, *plano xz* y *plano yz.*

Además, los planos coordenados dividen al espacio en ocho *octantes*:

$$x^+y^+z^+;\ x^+y^+z^-;\ x^+y^-z^+;\ x^+y^-z^-;$$
$$x^-y^+z^+;\ x^-y^+z^-;\ x^-y^-z^+;\ x^-y^-z^-;$$

Así, en las coordenadas rectangulares espaciales (o tridimensionales), tenemos las siguientes regiones:

Región	Descripción
plano xy	puntos de la forma $P(x, y, 0)$.
plano xz	puntos de la forma $P(x, 0, z)$.
plano yz	puntos de la forma $P(0, y, z)$.
eje x	puntos de la forma $P(x, 0, 0)$.
eje y	puntos de la forma $P(0, y, 0)$.
eje z	puntos de la forma $P(0, 0, z)$.

Distancia entre puntos

Dados dos puntos en el espacio $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ la distancia entre ellos está dada por

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Ejemplo 1: Hallar la distancia entre los puntos $P_1(1, 2, 3)$ y $P_2(2, 4, 5)$.

Usando la fórmula anterior tendremos

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(2-1)^2 + (4-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$$

(recodar que las distancias siempre son positivas).

2 Vectores en el espacio

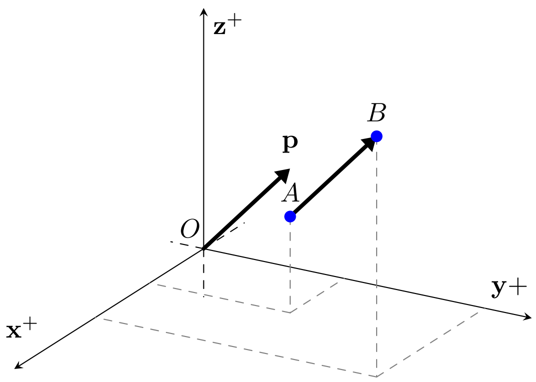
De manera análoga a lo hecho en el plano, podemos definir vectores en el espacio como segmentos de recta orientados. De esta forma, generalizamos lo dicho para el plano:

El vector con origen $A(x_1, y_1, z_1)$ y extremo $B(x_2, y_2, z_2)$ estará dado por

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Todo punto $P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tiene asociado su *vector posición* $\mathbf{p} = \overrightarrow{OP} = (x, y, z)$.

Ejemplo 2: El vector con origen en $A(2, 3, 2)$ y extremo $B(4, 6, 5)$ es $\overrightarrow{AB} = (4-2, 6-3, 5-2) = (2, 3, 3)$, y así queda también determinado el vector posición $\mathbf{p}$ paralelo a $\overrightarrow{AB}$.



2.1 Álgebra vectorial

De manera análoga al plano, tenemos definidas las siguientes operaciones vectoriales.

Sean $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vectores en el espacio, entonces:

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$ (suma)
2. $\mathbf{u} - \mathbf{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3)$ (resta)
3. $k\mathbf{u} = (ku_1, ku_2, ku_3)$, si $k \in \mathbb{R}$ (multiplicación por un escalar).
4. $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$ si $\mathbf{u} = k\mathbf{v}$ para algún $k \in \mathbb{R}$ (paralelismo).
5. $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$ (módulo o norma).
6. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$ (producto escalar).

Además la relación $\|\mathbf{u}\|^2 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$ para todo vector $\mathbf{u}$, sigue siendo válida en este contexto.

Los vectores que cumplen $\|\mathbf{v}\| = 1$ son los *versores*, y hay tres que son fundamentales:

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \qquad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \qquad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

y dan lugar a la *expresión canónica* correspondiente:

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) = u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j} + u_3 \mathbf{k}$$

Y de manera análoga a lo visto en dos dimensiones, un vector $\mathbf{u}$ se puede proyectar sobre otro vector $\mathbf{v}$.

Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores en el espacio, entonces la proyección vectorial y escalar de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$ están dadas por

$$\operatorname{proy}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v}, \qquad \operatorname{proy\ esc}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|}$$

Y también sigue valiendo la fórmula que relaciona el producto escalar con el ángulo entre dos vectores:

Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores, entonces $\cos\theta = \dfrac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$.

La última fórmula también la podemos escribir como $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos\theta$.

2.2 Producto vectorial

Ya vimos que al multiplicar escalarmente dos vectores obtenemos un número. Pero ahora veremos un producto entre vectores cuyo resultado es un vector, y que va a ser muy útil al trabajar con vectores que querramos perpendiculares:

Dados dos vectores $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ se define el *producto vectorial* como

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(u_2 v_3 - u_3 v_2,\ -(u_1 v_3 - u_3 v_1),\ u_1 v_2 - u_2 v_1\right).$$

El producto vectorial también se denomina *producto cruz* o *externo*.

Ejemplo 3: Dados $\mathbf{u} = (1, 2, -2)$ y $\mathbf{v} = (3, 2, 1)$ hallar $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \left(\overset{u_2}{2} \cdot \overset{v_3}{1} - \overset{u_3}{(-2)} \cdot \overset{v_2}{2},\ -\left[\overset{u_1}{1} \cdot \overset{v_3}{1} - \overset{u_3}{(-2)} \cdot \overset{v_1}{3} \right],\ \overset{u_1}{1} \cdot \overset{v_2}{2} - \overset{u_2}{2} \cdot \overset{v_1}{3} \right) \\ &= (6, -7, -4)\,.\end{aligned}$$

El resultado del producto vectorial $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ entre dos vectores es un nuevo vector.

Regla de cálculo Para evitar recordar la fórmula, podemos usar la siguiente regla para determinar el producto vectorial:

Denominamos *determinante de orden 2* a la siguiente expresión: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$

Notemos que el determinante es un número, que se escribe como tabla y que se calcula restando las únicas dos diagonales que hay. Así, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2.$

Con estos determinantes podemos escribir el producto vectorial mediante su expresión canónica:

Dados dos vectores $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ tendremos

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}.$$

Ejemplo 4: Retomamos el ejemplo anterior donde $\mathbf{u} = (1, 2, -2)$ y $\mathbf{v} = (3, 2, 1)$, entonces

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{k} = 6\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 4\mathbf{k} = (6, -7, -4)$$

Regla nemotécnica Otra regla muy usada para calcular el producto vectorial es la siguiente: dados $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ formamos la siguiente tabla, y con un color azul marcamos las diagonales que descienden hacia la derecha y con rojo las que lo hacen hacia la izquierda:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}$$

y para obtener el producto vectorial sumamos todos los productos de las cajas azules y restamos todos los productos de las cajas rojas y ordeno:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= u_2 v_3 \mathbf{i} + u_1 v_2 \mathbf{k} + v_1 u_3 \mathbf{j} - v_1 u_2 \mathbf{k} - u_3 v_2 \mathbf{i} - u_1 v_3 \mathbf{j} \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2)\,\mathbf{i} + (v_1 u_3 - u_1 v_3)\,\mathbf{j} + (u_1 v_2 - v_1 u_2)\,\mathbf{k} \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2, v_1 u_3 - u_1 v_3, u_1 v_2 - v_1 u_2)\end{aligned}$$

2.3 Propiedades del producto vectorial

Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores, y θ el ángulo entre ellos, entonces:

1. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$.
2. $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$.
3. $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$.
4. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \times \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v} \rangle = 0$.
5. $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \sin\theta$.

Observacion 1: De la propiedad 4 sigue que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ son ortogonales (lo mismo ocurre entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$).

Observacion 2: Supongamos ahora que $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, entonces por la última propiedad tendremos que $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \sin\theta = 0$, así

$$\|\mathbf{u}\| = 0 \quad \text{ó} \quad \|\mathbf{v}\| = 0 \quad \text{ó} \quad \sin\theta = 0,$$

lo que nos lleva a que

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{ó} \quad \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{ó} \quad \theta = 0 \text{ ó } \pi,$$

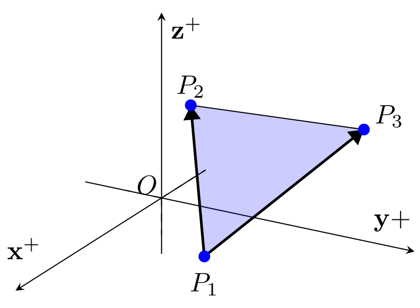
En cualquiera de los tres casos, los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos. Luego *dos vectores* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *son paralelos si y solo si* $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

2.3.1 Producto vectorial y área

Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores, entonces el área del paralelogramo formado por ellos vale $A = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$.

En otras palabras, la longitud de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es numéricamente igual al área del paralelogramo formado por los vectores.

Ejemplo 5: Encontrar el área del triángulo determinado por los puntos $P_1(2,2,0)$, $P_2(-1,0,2)$ y $P_3(0,4,3)$.



Notamos que el área A del triángulo es la mitad del área del paralelogramo determinado por los vectores $\overrightarrow{P_1P_2}$ y $\overrightarrow{P_1P_3}$. Pero $\overrightarrow{P_1P_2} = (-3,-2,2)$ y $\overrightarrow{P_1P_3} = (-2,2,3)$, entonces

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = (-10, 5, -10),$$

luego $A = \dfrac{1}{2}\|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}\| = \dfrac{15}{2}$.

2.4 Producto mixto

Dados tres vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, se define el *producto mixto* o *triple producto escalar* entre ellos como $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \times \mathbf{w} \rangle$.

2.4.1 Propiedad del producto mixto

Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ vectores, entonces $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \times \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.

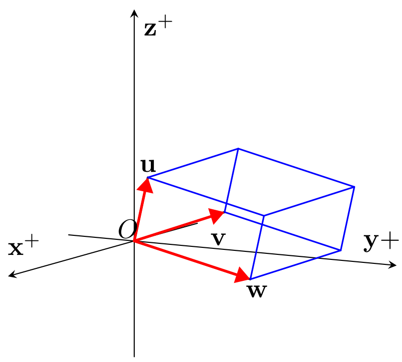
2.4.2 Producto mixto y volumen

La aplicación más inmediata del producto mixto es el cálculo sencillos de volúmenes:

Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ vectores, entonces el volumen del paralepípedo determinado por ellos es igual al valor absoluto del producto mixto entre ellos, es decir, $V = |\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \times \mathbf{w} \rangle|$

Ejemplo 6: Encontrar el volumen del paralepípedo determinado por los vectores

$$\mathbf{u} = (1, 2, 3), \ \mathbf{v} = (-3, 4, 1), \ \mathbf{w} = (-4, 5, -2).$$



Sabemos que el volumen de tal paralepípedo es igual a $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \times \mathbf{w} \rangle$.

Entonces se calcula $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \times \mathbf{w} \rangle = 1 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = -13 - 20 + 3 = -30.$

Luego el volumen del paralepípedo es $V = |-30| = 30$.

2.4.3 Producto mixto y coplanaridad

Otra aplicación es el chequeo de coplanaridad de vectores:

Tres vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ con el mismo punto inicial están en el mismo plano si y solo si $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \times \mathbf{w} \rangle = 0$.

De lo anterior sigue que cuatro puntos P_1, P_2, P_3 y P_4 estarán en el mismo plano si el producto mixto de los vectores $\mathbf{u} = \overrightarrow{P_1P_2}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_3}$ y $\mathbf{w} = \overrightarrow{P_1P_4}$ es igual a 0.

2.4.4 Producto vectorial y escalar

El producto escalar y el vectorial se relacionan de la siguiente manera:

> Dados tres vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, vale $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \mathbf{v} + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{w}$.

En otras palabras, podemos escribir el producto vectorial a partir de escalar.

3 Rectas en el espacio

A diferencia de lo visto en dos dimensiones donde podíamos representar algebraicamente una recta escribiendo una variable en función de la otra $y = mx + b$, en tres dimensiones eso ya no resulta posible. Debido a ello, cobran mayor importancia formas alternativas de escribir las rectas (que generalizan al espacio expresiones ya vistas con anterioridad).

3.1 Ecuación vectorial de la recta

> La *ecuación vectorial* de la recta que pasa por el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y es paralela al vector $\mathbf{r}_0 = (r_x, r_y, r_z)$ ($\mathbf{r}_0 \neq \mathbf{0}$) es:
>
> $$r : \mathbf{r} = t\mathbf{r}_0 + \overrightarrow{OP_0} = t(r_1, r_2, r_3) + (x_0, y_0, z_0).$$

Al igual que en el caso bidimensional, el vector $\mathbf{r}_0$ se denomina *vector director* de la recta r y no es único, por lo que hay muchas maneras de escribir una recta r de forma vectorial.

Siguen siendo válidos estas afirmaciones ya vistas previamente en dimensión menor:

Sean r y r' dos rectas, con vectores directores $\mathbf{r}_0$ y $\mathbf{r}'_0$, entonces

1. $r \parallel r'$ si y sólo si $\mathbf{r}_0 \parallel \mathbf{r}'_0$.
2. $r \perp r'$ si y sólo si $\mathbf{r}_0 \perp \mathbf{r}'_0$.

3.2 Ecuación paramétrica cartesiana

Si expresamos componente a componente una expresión vectorial de una recta, entonces obtenemos lo siguiente:

> La *ecuación paramétrica cartesiana* de la recta que pasa por el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y es paralela al vector $\mathbf{r}_0 = (r_x, r_y, r_z)$ ($\mathbf{r}_0 \neq \mathbf{0}$) es:
>
> $$r : \begin{cases} x = r_x t + x_0 \\ y = r_y t + y_0 \\ z = r_z t + z_0 \end{cases}$$

3.3 Ecuación simétrica de la recta

Si queremos que la escritura de la recta no dependa del parámetro t, entonces lo despejamos de cada una de las componentes de su expresión paramétrica cartesiana e igualamos.

La *ecuación simétrica* de la recta que pasa por el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y es paralela al vector $\mathbf{r}_0 = (r_x, r_y, r_z)$ con $r_x, r_y, r_z \neq 0$, es:

$$r : \frac{x - x_0}{r_x} = \frac{y - y_0}{r_y} = \frac{z - z_0}{r_z}$$

Ejemplo 7: Busquemos la expresión de la recta que pasa por el punto $P_0(1, 2, 3)$ y tiene como vector director a $\mathbf{r}_0 = (-2, 3, 1)$.

Entonces una ecuación vectorial será $r : (x, y, z) = t \cdot (-2, 3, 1) + (1, 2, 3)$.

Separando las componentes, tendremos su ecuación paramétrica cartesiana $r : \begin{cases} x = -2 \cdot t + 1 \\ y = 3 \cdot t + 2 \\ z = t + 3 \end{cases}$.

Despejado t, obtenemos las ecuaciones siétricas $r : \underbrace{\frac{x - 1}{-2}}_{=t} = \frac{y - 2}{3} = \frac{z - 3}{1}$.