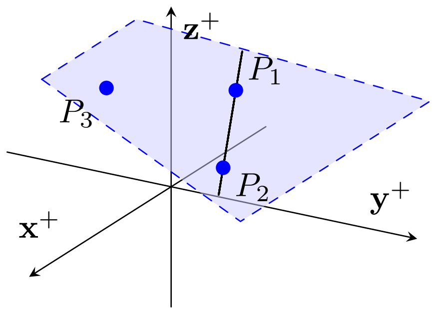
Planos

1 Definición del plano

El plano es una superficie bidimensional que se extiende de manera indefinida en todas las direcciones dentro del espacio. Es un conjunto de puntos que cumplen ciertas condiciones geométricas y puede pensarse como una “hoja infinita” sin grosor ni dobleces.

Intuitivamente, vemos que la condición de no tener grosor ni dobleces, implica la siguiente propiedad:

Propiedad fundamental del plano: Si dos puntos distintos P_1 y P_2 están en un mismo plano π, entonces la recta $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ está contenida en π. Además un plano es un *subconjunto propio* del espacio, y contiene al menos *tres* puntos distintos.



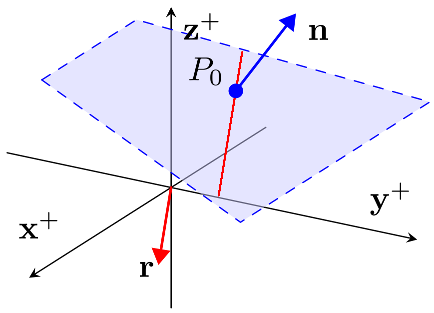
Entonces, dados dos puntos P_1 y P_2 del plano π tendremos una recta $r = \overleftrightarrow{P_1P_2}$ contenida en π, y recordemos que la recta r siempre tiene algún vector director $\mathbf{r}$, de esta manera podemos definir paralelismo entre planos y vectores:

Diremos que el vector $\mathbf{r}$ es *paralelo* al plano π, si existe una recta $r : t\mathbf{r} + \mathbf{p}_0$ contenida en π.

Notemos que los vectores paralelos a π serán aquellos vectores $\mathbf{r}$ tales que si su punto de aplicación es un punto del plano, entonces todo el vector estará contenido en π.

De manera análoga definimos la perpendicularidad:

Un vector $\mathbf{n}$ es *normal* (o *perpendicular*) al plano π si es normal a todo vector $\mathbf{r}$ paralelo a π.



Formalmente, el plano es la generalización del concepto de una recta en dos dimensiones. Y al igual que las rectas, en el espacio tridimensional, un plano puede ser definido como el conjunto de puntos cuya posición cumple con una relación algebraica particular.

1.1 Ecuación implícita del plano

La *ecuación implícita* o *general* de un plano es $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$.

Todo punto que cumpla la ecuación previa (fijados los coeficientes A, B, C, D) estarán en el plano definido por la expresión.

Ejemplo 1: Consideremos el plano $\pi : x + 2y + 3z - 4 = 0$, aquí $A = 1$, $B = 2$, $C = 3$ y $D = -4$.

Vemos que el punto $P(0, 2, 0)$ está en el plano pues $0 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 - 4 = 0$, mientras que el punto $Q(1, 1, 1)$ no lo está porque $1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 4 = 2 \neq 0$.

Ahora supongamos que tenemos dos puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ pertenecientes a un plano $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$.

Entonces la recta $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ está contenida en el plano, y el vector $\mathbf{p} = \overrightarrow{P_1P_2}$ es un vector director de dicha recta. Además, si el punto de aplicación de $\mathbf{p}$ fuera P_1, entonces el vector estaría contenido en el plano.

Como P_1 y P_2 cumplen las ecuaciones tendremos

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$
$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0$$

Si restamos las dos ecuaciones tendremos

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0 = \langle (A, B, C), \overrightarrow{P_1P_2} \rangle$$

Y esto vale para todo par de puntos distintos del plano π.

Así hemos probado que cualquier dirección paralela al plano, es perpendicular a (A, B, C).

Dado el plano $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$, el vector $\mathbf{n} = (A, B, C)$ es normal al plano.

Lo anterior nos permite determinar un plano a partir de un punto y una normal:

La ecuación del plano π que pasa por $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y es normal a $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$, es

$$\pi : n_1x + n_2y + n_3z - \langle \mathbf{n}, (x_0, y_0, z_0) \rangle = 0.$$

Ejemplo 2: Encontrar la ecuación del plano que pasa por el punto $P_0(2, 3, 4)$ y es perpendicular a $\mathbf{n} = (-3, -3, -3)$. Primero calculamos $\langle (-3, -3, -3), (2, 3, 4) \rangle = -6 - 9 - 12 = -27$.

Por lo anterior tendremos que dicho plano está dado por $\pi : -3x - 3y - 3z - (-27) = 0$, si simplificamos obtenemos $\pi : x + y + z - 9 = 0$.

Los vectores normales nos permiten analizar las posiciones relativas entre planos:

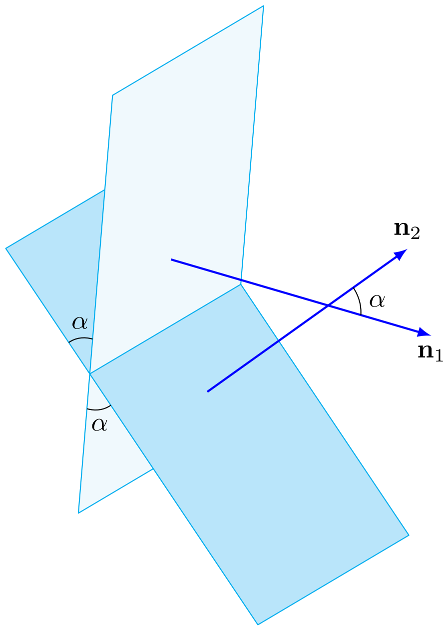
Sean π_1 y π_2 planos con vectores normales $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ respectivamente. Entonces

- $\pi_1 \parallel \pi_2$ si y sólo si $\mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_2$.
- $\pi_1 \perp \pi_2$ si y solo si $\mathbf{n}_1 \perp \mathbf{n}_2$.

Utilizando el producto escalar y vectorial, podemos reescribir lo anterior como

- $\pi_1 \parallel \pi_2$ si y sólo si $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = 0$ (condición de paralelismo).
- $\pi_1 \perp \pi_2$ si y solo si $\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = 0$ (condición de perpendicularidad).

El ángulo entre dos planos π_1 y π_2 es igual al ángulo entre sus normales $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$.



La distancia de un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ está dada por

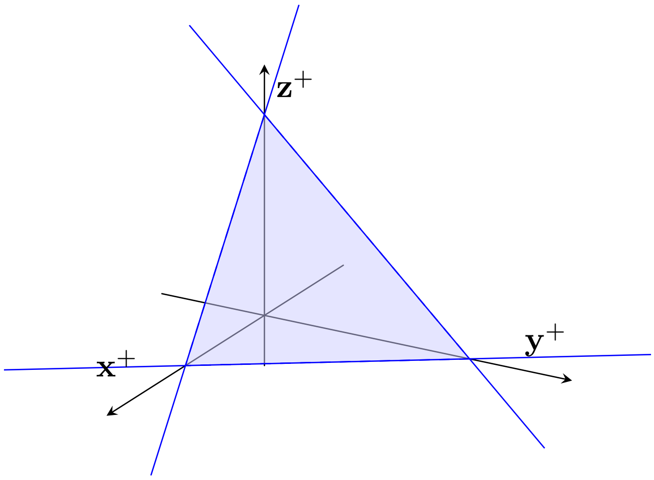
$$d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

1.2 Trazas del plano

Se denominan *trazas* de un plano a sus intersecciones (si existen) con los planos coordenados.

Ejemplo 3: Sea el plano $\pi : 8x + 4y + 2z - 16 = 0$. Busquemos sus trazas:

- Intersección con el plano xy ($z = 0$): como $z = 0$, tendremos que es la recta $r_1 : 8x + 4y - 16 = 0$, simplificando tenemos $r_1 : 2x + y - 4 = 0$.
- Intersección con el plano xz ($y = 0$): como $y = 0$, tendremos que la traza correspondiente será $r_2 : 8x + 2z - 16 = 0$, simplificando $r_2 : 4x + z - 8 = 0$.
- Intersección con el plano yz ($x = 0$): como $x = 0$, tendremos $r_3 : 4y + 2z - 16 = 0$, simplificando $r_3 : 2y + z - 8 = 0$.



1.3 Ecuación segmentaria del plano

La ecuación implícita de un plano no es única: puede haber muchas que representen el mismo plano. Por ejemplo: $\pi : 3x+6y+9z-9=0$ y $\pi : x+2y+3z-3=0$ son ecuaciones distintas, pero representan el mismo plano.

Si tenemos un plano $\pi : Ax+By+Cz+D=0$ con $A,B,C,D \neq 0$, entonces:

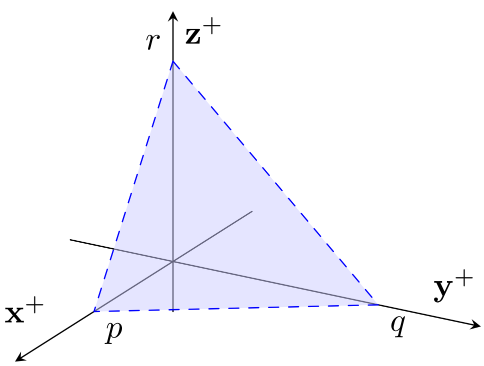
$$\pi :: Ax+By+Cz+D=0 \;\Rightarrow\; \left(-\frac{A}{D}\right)x+\left(-\frac{B}{D}\right)y+\left(-\frac{C}{D}\right)z=1$$

y esto último lo podemos escribir como $\dfrac{x}{(-\frac{D}{A})}+\dfrac{y}{(-\frac{D}{B})}+\dfrac{z}{(-\frac{D}{C})}=1$,

Si convenimos en llamar $p=\left(-\dfrac{D}{A}\right)$, $q=\left(-\dfrac{D}{B}\right)$ y $r=\left(-\dfrac{D}{C}\right)$, obtendremos:

> La expresión $\dfrac{x}{p}+\dfrac{y}{q}+\dfrac{z}{r}=1$, se denomina *ecuación segmentaria* del plano.

De manera análoga a lo que ocurre con la recta, los valores p,q,r dan los puntos de corte del plano con los ejes de coordenadas.



Como esos puntos de cortes son únicos, entonces

La ecuación segmentaria es única para cada plano.

Ejemplo 4: Sea el plano $\pi : 3x + 6y - 4z - 12 = 0$, dar los puntos de intersección con los ejes y hallar su ecuación segmentaria.

Primero hallamos sus intersecciones con los ejes:

- Eje x: entonces $y = z = 0$, y tendremos $3x - 12 = 0 \Rightarrow x = 4$. El punto de intersección es $(4, 0, 0)$ y $p = 4$.
- Eje y: entonces $x = z = 0$, y tendremos es $6y - 12 = 0 \Rightarrow y = 2$. El punto de intersección es $(0, 2, 0)$ y $q = 2$.
- Eje z: entonces $x = y = 0$, y tendremos es $-4z - 12 = 0 \Rightarrow z = -3$. El punto de intersección es $(0, 0, -3)$ y $r = -3$.

Así la ecuación segmentaria resulta $\pi : \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{-3} = 1$.

2 Análisis de algunos planos particulares

En el espacio bidimensional, hemos visto que las ecuaciones $r : x = c$ o $r : y = k$, que restringen una variable y dejan libre la otra, dan como resultado rectas paralelas a los ejes coordenados x e y respectivamente. En el espacio, sin embargo, las posibilidades se amplían: podemos fijar una variable como constante o bien, dejarla libre y restringir de algún modo las otras dos. Además lo anterior lo podemos realizar seleccionando cada una de las tres variables. A continuación veremos los distintos casos posibles.

Recordemos, que de la sección anterior, sabemos que todo plano puede representarse (de manera no única) a través de una ecuación implícita $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$.

Entonces, eso significa que un punto $P(x_0, y_0, z_0) \in \pi$ solamente si $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

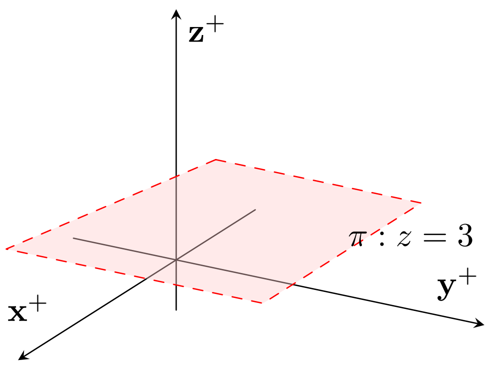
Si $A = B = C = 0$ y $D \neq 0$, entonces no hay ningún punto que verifique la ecuación y el plano es vacío.

2.1 Planos paralelos a los planos coordenados

Si en la ecuación de un plano $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$, dos coeficientes de A, B, C son nulos y el restante es distinto de cero, el plano es paralelo a uno de los planos coordenados.

En este caso, tendremos dos variables libres y una restringida. Y finalmente el plano π será paralelo, al plano coordenado correspondiente a las variables que no aparecen en la ecuación.

Ejemplo 5: Supongamos que $A = B = 0$, $C = 1$, $D = -3$, entonces resulta el plano $\pi : z = -\dfrac{D}{C} = 3$, que es paralelo al plano coordenado xy.



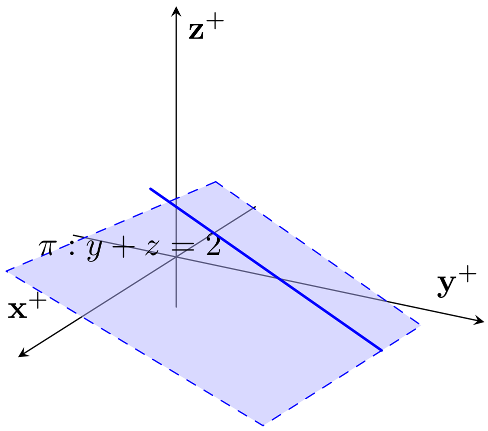
Ejemplo 6: Si $A = C = 0$, $B = 1$, $D = 0$, entonces tenemos el plano $\pi : y = 0$. Y el plano, además de ser parelelo, *coincide* con el plano coordenado xz.

2.2 Planos paralelos a los ejes coordenados

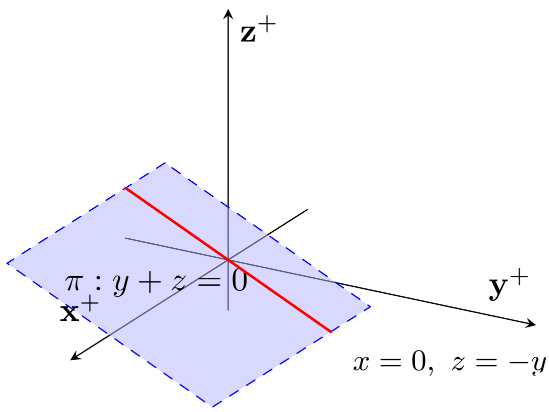
Si en la ecuación de un plano $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$, un solo coeficiente de A, B, C es nulo, el plano es paralelo a uno de los ejes de coordenados.

En este caso, tendremos una sola variable libre (la que no aparece en la ecuación) y el plano será paralelo al correspondiente eje.

Ejemplo 7: Tomemos $\pi : y + z - 2 = 0$, en este caso $A = 0$, $B = C = 1$ y $D = -1$. Entonces tendremos libre la variable x y las otras dos ligadas por la relación $z = 2 - y$, y el plano resultante será paralelo al eje x.



Ejemplo 8: Si en el ejemplo anterior, añadimos la condición $D = 0$, tendremos el plano $\pi : y + z = 0$, y tendremos que el plano *contendrá* al eje x.



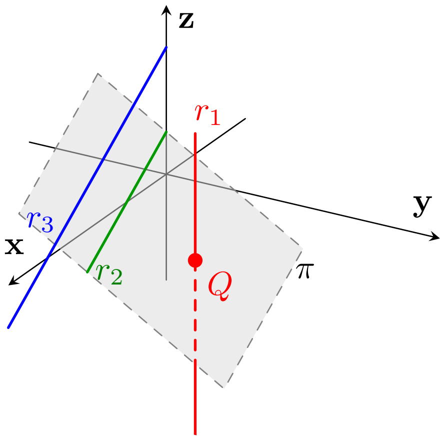
3 Rectas y planos

Las rectas y los planos son los objetos más simples del espacio. Ambos pueden definirse a partir de vectores, intersecarse, determinar ángulos y dar lugar a las situaciones de paralelismo y perpendicularidad. Hasta ahora vimos todo esto para los combos recta-recta o plano-plano. Ahora veremos qué sucede al considerar la relación recta-plano.

3.1 Posiciones relativas

Consideremos una recta $r : t\mathbf{v} + \mathbf{p}_0$, y un plano $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$. Entonces tenemos tres posibilidades:

1. r corta a π en un solo punto $Q \in r \cap \pi$.
2. r no corta a π, es decir $r \cap \pi = \emptyset$.
3. r está completamente contenida en π, es decir $r \subset \pi$.



Relaciones entre una recta y un plano: intersección puntual (r_1 en Q), inclusión (r_2), y paralelismo externo (r_3).

Veamos cómo podemos determinar, partiendo de las ecuaciones de r y π, cuál de esas situaciones tiene lugar.

3.1.1 Intersección de un plano y una recta

Sabemos que $\mathbf{n} = (A, B, C)$ es normal a π y que $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ es director de r. Asumamos el caso 1 y que algún punto de r (correspondiente a un valor t' del parámetro), *también está en* π, entonces pondremos la expresión *paraétrica* de r correspondiente dentro de la implícita del plano:

$$A(t'v_1 + x_0) + B(t'v_2 + y_0) + C(t'v_r + z_0) + D = 0 \Rightarrow t'\langle \mathbf{n}, \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{p}_0\rangle + D = 0$$

donde $\mathbf{p}_0 = \overrightarrow{OP_0}$, es el vector posición del punto P_0 de la recta r.

Despejando el parámetro t resulta

$$t' = -\frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{p}_0\rangle + D}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{v}\rangle} \tag{1}$$

Notemos que siempre que resulte posible calcular el valor de t, este será *único* y estaremos en el caso 1, donde $r \cap \pi = \{Q\}$. Pero dicha expresión sólo tiene sentido si el denominador es distinto de cero, luego

> Un plano π y una recta r se intersecan en un único punto si y sólo si $\langle \mathbf{n}, \mathbf{v}\rangle \neq 0$, donde $\mathbf{n}$ es normal al plano y $\mathbf{v}$ director de r.

El punto de intersección se determina tomando $Q = t'\mathbf{v} + \mathbf{p}_0$, con t' determinado por la expresión (1).

Ejemplo 9: Determinar si la recta $r : t(1, 2, 4) + (1, 0, 1)$ se interseca con el plano $\pi : 3x + 2y + z - 1 = 0$. En caso afirmativo, determinar el punto de intersección.

Primero chequeamos si hay intersección: el vector director de r es $\mathbf{v} = (1, 2, 4)$ mientras que el normal al plano es $\mathbf{n} = (3, 2, 1)$. Calculando $\langle \mathbf{v}, \mathbf{n}\rangle = 11 \neq 0$ vemos que se cumple la condición para que se intersecten.

Determinemos ahora el punto $P(x, y, z)$ de intersección: dicho punto estará en la recta, por lo que será de la forma:

$$P(x, y, z) = (t' + 1, 2t', 4t' + 1)$$

donde t' es un valor a determinar. Como $P(x, y, z) \in \pi$, vale

$$3(t' + 1) + 2(2t') + (4t' + 1) - 1 = 11t' + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad t' = \frac{-3}{11}.$$

Despejado t', lo reemplazamos en la ecuación de la recta y tendremos el punto de intersección:

$$P(x,y,z) = (\frac{-3}{11} + 1, 2\frac{-3}{11}, 4\frac{-3}{11} + 1) = (\frac{8}{11}, \frac{-6}{11}, \frac{-1}{11}).$$

3.1.2 Paralelismo plano-recta

La siguiente conclusión, es que los casos 2 y 3 únicamente tienen lugar cuando $\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle = 0$, es decir, cuando el director $\mathbf{v}$ y el normal $\mathbf{n}$ son perpendiculares. En ambos casos, la recta y el plano serán paralelos.

Un plano π y una recta r son *paralelos* si y sólo si $\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

En tal caso, sólo puede ocurrir que la recta esté totalmente contenida o totalmente fuera del plano (la inclusión completa se considera paralelismo).

Ejemplo 10: Determinar si hay intersección entre la recta $r : t(2,1,0) + (1,0,2)$ y el plano $\pi : -x + 2y + 3z - 1 = 0$.

Aquí tendremos que el vector director de la recta es $\mathbf{v} = (2,1,0)$ y el normal al plano $\mathbf{n} = (-1,2,3)$. Como $\langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle = 0$, el plano y la recta son *paralelos*.

Para chequar si la intersección es vacía o no, tomamos un punto conocido de la recta: $P_0(1,0,2)$ y vemos si está en el plano:

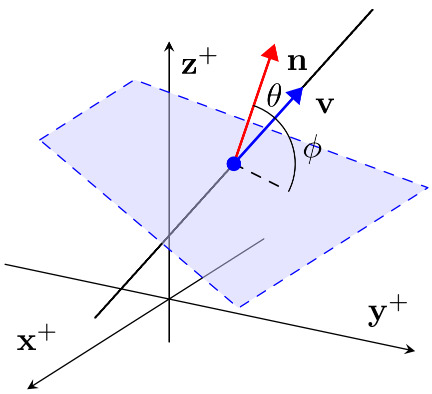
$$-x_0 + 2y_0 + 3z_0 - 1 = -1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 - 1 = -1 + 6 - 1 = 4 \neq 0$$

Como $P_0 \notin \pi$, podemos afirmar que la recta es paralela y no corta a π.

3.1.3 Ángulo entre planos y rectas. Perpendicularidad

En las secciones anteriores, vimos que la posición relativa entre un plano π y una recta r, puede determinarse a través de analizar el vector normal $\mathbf{n}$ y el director $\mathbf{v}$. En particular, la relación de paralelismo, se da cuando el ángulo entre esos vectores es recto. Esto se generaliza de la siguiente manera:

El ángulo entre un plano π y una recta r es igual al *complemento* del ángulo entre $\mathbf{n}$ y el director $\mathbf{v}$.



Nota técnica: recordemos que el *complemento* de un ángulo $\theta < \frac{\pi}{2}$ es el ángulo $\phi = \frac{\pi}{2} - \theta$. Para que esto tenga sentido, necesitamos que el ángulo entre $\mathbf{n}$ y $\mathbf{v}$ sea menor que $\frac{\pi}{2}$. Si tal cosa no ocurriera, simplemente cambiamos el signo de $\mathbf{n}$ o $\mathbf{v}$ (y modificamos la correspondiente ecuación del plano o la recta).

Notemos que si $\mathbf{n}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos, entonces el ángulo entre ellos es nulo, lo que significa que el ángulo entre π y r es recto:

Ejemplo 11: En el Ejemplo 9 vimos que la recta $r : t(1, 2, 4) + (1, 0, 1)$ y el plano $\pi : 3x + 2x + z - 1 = 0$ se intersecan en un punto. Sabiendo eso, determinemos el ángulo que forman.

Sea θ el ángulo formado por el vector director y el normal, entonces:

$$\cos(\theta) = \frac{\langle(1, 2, 4); (3, 2, 1)\rangle}{\|(1, 2, 4)\| \cdot \|(3, 2, 1)\|} = \frac{11}{\sqrt{21}\sqrt{14}} \quad \Rightarrow \quad \theta = \arccos\left(\frac{11}{\sqrt{21}\sqrt{14}}\right) \approx 0.876\text{rad} \approx 50.2°$$

luego, el ángulo entre r y π será el complemento de θ:

$$\varphi = 90° - \theta \approx 39.8°$$

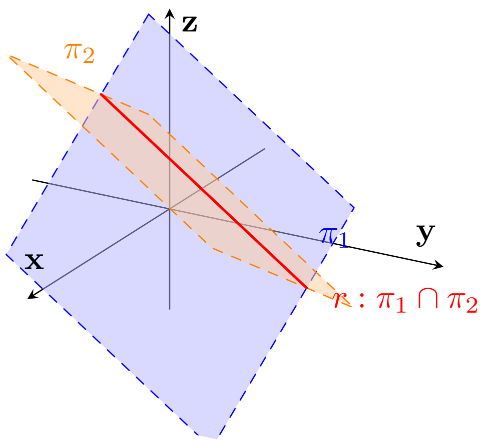
Una recta r y un plano π serán *perpendiculares* si y sólo si $\mathbf{n} \parallel \mathbf{v} = 0$. Es decir, si $\mathbf{n} \times \mathbf{v} = 0$.

3.2 Intersección de planos

Una observación intuitiva es la siguiente:

La intersección de dos planos no paralelos π_1 y π_2, es una recta.

Ejemplo 12: Los planos $\pi_1 : x + y + z = 1$ y $\pi_2 : -x + y + z = 1$ se intersecan a lo largo de su traza con el plano yz, es decir, a lo largo de la recta $r : x = 0, y + z = 1$.



La pregunta, entonces es cómo determinar la recta intersección de dos planos $\pi_1 : A_1x + B_1 + C_1z + D_1 = 0$ y $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Recordemos que para cada uno de los planos, tenemos el correspondiente vector normal $\mathbf{n}_i = (A_i, B_i, C_i)$.

Si dos planos no paralelos π_1 y π_2 se intersecan, el vector $\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ es director de la recta $r : \pi_1 \cap \pi_2$.

Conocido un vector director de la recta $\mathbf{v}$, queda pendiente la determinación de un punto P_0, perteneciente a r, lo que depende del contexto del problema.

Ejemplo 13: Hallar la recta intersección de los planos $\pi_1 : 2x + y + z - 1 = 0$ y $\pi_2 : x - y + z + 1 = 0$.

Tendremos entonces los vectores normales $\mathbf{n}_1 = (2, 1, 1)$ y $\mathbf{n}_2 = (1, -1, 1)$, luego $\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = (2, -1, 3)$ será un vector director de $r : \pi_1 \cap \pi_2$. Queda determinar un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

Necesitamos un $P_0(x_0, y_0, z_0)$ que resuelva el sistema $\begin{cases} 2x_0 + y_0 + z_0 - 1 = 0 \\ x_0 - y_0 + z_0 + 1 = 0 \end{cases}$.

Si sumamos las dos ecuaciones resulta: $3x_0 + 2z_0 = 0$. Si tomamos $x_0 = 0$, resulta que debe valer $z_0 = 0$. Y reemplazando en las dos ecuaciones obtenemos $y_0 = 1$. Luego, un punto posible es $P_0(0, 1, 0)$. Así tendremos que $r : t(2, -1, -3) + (0, 1, 0)$.

Recordatorio: la determinación del P_0, dependerá del contexto del problema. A veces será parte de la consigna o resultará sencillo obtenerlo, pero otras, deberemos resolver algún sistema de ecuaciones.

3.3 Rectas alabeadas y coplanares

Dos rectas r_1 y r_2 serán *coplanares* si por ellas pasa un plano π que contiene a ambas. Si tal plano no existe, las rectas serán *alabeadas*

Ejemplo 14: Las rectas $r_1 : x = y = 0$ (eje z) y $r_2 : x = 0, y = 2$ son coplanares: ambas están contenidas en el plano coordenado yz definido por $\pi : x = 0$.

Ejemplo 15: Las rectas $r_1 : x = y = 0$ (eje z) y la recta $r_2 : y = z = 2$ claramente no pueden estar en el mismo plano.

La pregunta es cómo reconocer en general si dos rectas arbitrarias, son coplanares o alabeadas.

Dos rectas dadas en forma vectorial $r_1 : t\mathbf{v}_1 + \overrightarrow{OP_1}$ y $r_2 : t\mathbf{v}_2 + \overrightarrow{OP_2}$, serán coplanares si y sólo si el producto mixto de $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \times \overrightarrow{P_1P_2} \rangle$ es nulo. Caso contrario, serán alabeadas.

Ejemplo 16: Chequear si el par de rectas $r_1 : t(1, 2, 3) + (1, 0, 1)$ y $r_2 : t(1, 1, 1)$ son coplanares o alabeadas.

En este caso tendremos $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 1)$, $P_1(1, 0, 0)$ y $P_2(0, 0, 0)$. Luego planteamos el producto mixto correspondiente

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \times \overrightarrow{P_1P_2} \rangle = \langle (1, 2, 3); (1, 1, 1) \times (1, 0, 0) \rangle = \langle (1, 2, 3), (0, -1, 1) \rangle = -2 + 3 = 1 \neq 0.$$

Luego las rectas son alabeadas.

La siguiente pregunta que podemos formularnos es cómo determinar el plano que contenga a dos rectas que sabemos que son coplanares.

Dadas dos rectas coplanares con vectores directores $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$, el vector $\mathbf{n} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$ es normal al plano que las contiene.

Una vez determinado el vector normal, usando un punto de la recta r_1 o r_2 obtenemos inmediatamente una ecuación implícita del plano π que las contiene.

Ejemplo 17: Determinar si el par de rectas $r_1 : t(1, 2, 1) + (1, 0, -1)$ y $r_2 : t(1, 1, 1) + (3, 4, 1)$ son coplanares. En tal caso, determinar el plano que contiene a ambas.

Lo primero que haremos es determinar si son coplanares: $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 1)$, $P_1(1, 0, -1)$ y $P_2(3, 4, 1)$. Luego planteamos el producto mixto:

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \times \overrightarrow{P_1P_2} \rangle = \langle (1, 2, 1); (1, 1, 1) \times (2, 4, 2) \rangle = \langle (1, 2, 1), (-2, 0, 2) \rangle = 0.$$

Luego, r_1 y r_2 son coplanares. Determinemos el plano π tomando $\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (1, 0, -1)$ y $P_1(1, 0, -1)$, luego

$$\pi : x - z - 2 = 0.$$