Superficies

1 Superficies

Se denomina *superficie* al lugar geométrico de todos los puntos $P(x, y, z)$ del espacio que verifican $F(x, y, z) = 0$.

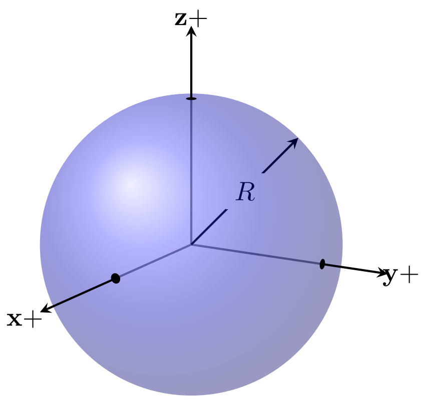
Ejemplo 1: El plano $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ es una superficie.

Ejemplo 2: La esfera (de radio R y centro $C(h, k, l)$) se define como el lugar geométrico S de los puntos $P(x, y, z)$ que están a distancia R de C.

Luego, si $P(x, y, z) \in S$, entonces $d(P, C) = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2} = R$, elevando al cuadrado obtenemos la *ecuación ordinaria de la esfera:*

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = R^2.$$

En particular, si el centro está en el origen, tendremos $h = k = l = 0$, y la ecuación de la superficie será $S : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.



Ejemplo 3: El lugar geométrico de los puntos *del espacio* que cumplen $x^2 + y - 1 = 0 = E(x, y)$ es una superficie si hacemos $F(x, y, z) = E(x, y)$.

Notemos que los puntos $P_1(\sqrt{2}, -1, 0)$, $P_2(\sqrt{2}, -1, 5)$, $P_3(\sqrt{2}, -1, -87)$ están todos. La tercera variable en este caso, no condiciona la pertenecia o no de un punto P a la superficie S.

Observacion: Siempre hay que señalar si nos encontramos en el plano o en el espacio. *Que una variable no aparezca en una expresión, no quiere decir que no pueda ser parte de su argumento.*

1.1 Simetrías de las superficies

1.1.1 Simetría respecto a los planos coordenados

Una superficie S es simétrica respecto de un plano coordenado si

- para todo $P(x, y, z) \in S$ vale que $P(x, y, -z) \in S$ (simétrica respecto del plano xy).
- para todo $P(x, y, z) \in S$ vale que $P(x, -y, z) \in S$ (simétrica respecto del plano xz).
- para todo $P(x, y, z) \in S$ vale que $P(-x, y, z) \in S$ (simétrica respecto del plano yz).

Ejemplo 4: Analizar las simetrías respecto de los planos coordenados de la superficie $S : z+y^2-x^2 = 0$. Notemos que en caso $F(x, y, z) = z + y^2 - x^2$.

- Respecto del plano xy ($z = 0$). Supongamos $P(x, y, z) \in S$, entonces $F(x, y, -z) = -z + y^2 - x^2 \neq z - x^2 = F(x, y, z) = 0$ (si $z \neq 0$). Entonces tomamos el punto $P(1, 0, 1)$ y vemos que $P \in S$, pero $Q(1, 0, -1) \notin S$. Luego no es simétrica respecto del plano xy.
- Respecto del plano xz ($y = 0$). Hacemos $F(x, -y, z) = z + (-y)^2 - x^2 = F(x, y, z) = 0$, luego es simétrica respecto del plano xz.
- Respecto del plano yz ($x = 0$). Hacemos $F(-x, y, z) = z+y^2-(-x)^2 = z+y^2-x^2 = F(x, y, z) = 0$. Luego es simétrica respecto del plano yz.

1.1.2 Simetría respecto a los ejes coordenados

Una superficie S es simétrica respecto de un eje coordenado si

- para todo $P(x, y, z) \in S$ vale que $P(x, -y, -z) \in S$ (simétrica respecto del eje x).
- para todo $P(x, y, z) \in S$ vale que $P(-x, y, -z) \in S$ (simétrica respecto del eje y).
- para todo $P(x, y, z) \in S$ vale que $P(-x, -y, z) \in S$ (simétrica respecto del eje z).

Una superficie puede ser simétrica respecto a un eje, pero no serlo respecto a un plano coordenado.

Ejemplo 5: Demostremos que la superficie $S : x^2+(y-z)^2 = 1$ es simétrica respecto al eje x. Para ello, debemos demostrar que la ecuación que define a S no se modifica cuando simultáneamente cambiamos $y \to -y$ y $z \to -z$. En este caso $F(x, y, z) = x^2 + (y - z)^2 - 1$.

$$F(x, -y, -z) = x^2 + ((-y) - (-z))^2 - 1 = x^2 + (-(y - z))^2 - 1 = F(x, y, z).$$

Luego, demostramos la simetría respecto del eje x.

Sin embargo, podemos ver que al cambiar *por separado* $y \to -y$ o $z \to -z$, la ecuación no se mantiene:

- $F(x, -y, z) = x^2 + (-y - z)^2 = x^2 + (-(y + z))^2 = x^2 + (y + z)^2 \neq F(x, y, z)$.
- $F(x, y, -z) = x^2 + (y - (-z))^2 = x^2 + (y + z)^2 \neq F(x, y, z)$.

Luego, la superficie no es simétrica respecto a los planos coordenados xy ni xz.

A menudo, la simetría respecto algunos planos coordenados nos permite obtener fácilmente la simetría respecto a un eje:

Si una superficie S es simétrica respecto a dos planos coordenados, es simétrica respecto al eje que determinan.

Ejemplo 6: Como la superficie $S : z + y^2 - x^2 = 0$ del ejemplo 4 es simétrica respecto al plano xz e yz, entonces es simétrica respecto del eje z.

1.1.3 Simetría respecto al origen

Una superficie S será simétrica respecto al origen O, si para cada $P(x, y, z) \in S$ vale que $P(-x, -y, -z) \in S$ también.

Ejemplo 7: Es muy sencillo de ver que el plano $x + y + z = 0$ es simétrico respecto al origen, pero no respecto a ningún eje ni plano coordenado.

Ejemplo 8: Es inmediato ver que la superficie $S : x^3 + y^3 + z = 0$ es simétrico respecto al origen, pero no respecto a ningún eje ni plano coordenado.

Al igual que en el caso anterior nos podemos apoyar en otras simetrias para obtener simetrías respeto al origen.

Si una superficie es simétrica respecto de los tres planos coordenados, es simétrica respecto del origen O.

Ejemplo 9: Es sencillo ver que la superficie $S : z + y^2 - x^2 = 0$ no es simétrica respecto del origen, entonces sabemos que no lo es respecto de algún plano coordenado (xy).

Por simplicidad podemos resumir en una tabla las simetrías vistas para una superficie $S : F(x, y, z) = 0$.

$\forall P(x, y, z) \in S$ se verifica	S es simétrica respecto a
$F(x, y, z) = F(x, y, -z) = 0$	Plano xy $(z = 0)$
$F(x, y, z) = F(x, -y, z) = 0$	Plano xz $(y = 0)$
$F(x, y, z) = F(-x, y, z) = 0$	Plano yz $(x = 0)$
$F(x, y, z) = F(x, -y, -z) = 0$	Eje x $(y = 0$ y $z = 0)$
$F(x, y, z) = F(-x, y, -z) = 0$	Eje y $(x = 0$ y $z = 0)$
$F(x, y, z) = F(-x, -y, z) = 0$	Eje z $(x = 0$ y $y = 0)$
$F(x, y, z) = F(-x, -y, -z) = 0$	Origen $(x = 0$, $y = 0$ y $z = 0)$

Table 1: Resumen de simetrías

Ejemplo 10: La esfera centrada en el origen $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ tiene todos los tipos de simetrías vistas.

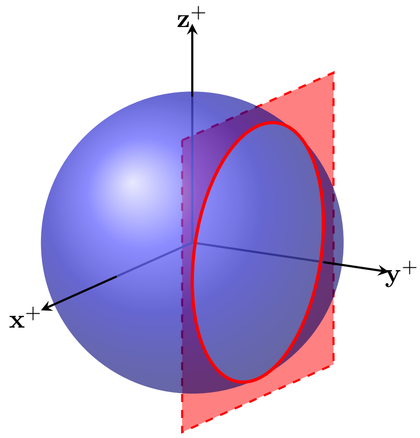
Recordatorio: la simetría respecto a planos coordenados, ejes o el origen se define como una condición de pertenecia de ciertos puntos (ej. $P(x, -y, z)$, $P(x, -y, -z)$, $P(-x, -y, -z)$). Sin embargo, esa condición se refleja en que la función $F(x, y, z)$ que define a la superficie, sufra cambios cuando hago reemplazos de la forma $x \to -x$, $y \to -y$, $z \to -z$.

1.2 Trazas de una superficie

Se denominan *trazas* de una superficie S a las secciones transversales formadas por sus intersecciones con planos paralelos a los planos coordenados.

En otras palabras, las trazas son las "rebanadas" resultantes de cortar una superficie de manera paralela al "piso" (plano xy) o alguna "pared" (planos yz, xz).

Ejemplo 11: Las trazas de la esfera $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ siempre son circunferencias.



Ejemplo 12: Hallar las trazas de la superficie $S : x^2 - y^2 - z = 0$.

2 Cilindros

> Se denomina cilindro a la superficie S generada por una recta r que se mueve de manera paralela a una recta fija dada y pasa siempre por una curva plana fija $\mathcal{C}$ dada. La recta móvil se llama *generatriz* y la curva fija *directriz.*

El cilindro es una superficie *infinita.* Siempre se expande en alguna dirección, por que siempre dará lugar a una traza $\mathcal{C}$ con algún plano coordenado. Dicha traza *puede ser tomada como curva directriz.*

Al mismo tiempo, la dirección de la recta generatriz queda determinara por la de su vector director $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

Luego, una traza y un vector nos permite definir un cilindro:

> Un cilindro cuya traza con el plano xy es $\mathcal{C} : F(x, y) = 0$, y su generatriz se mueve paralela al vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ $(v_3 \neq 0)$, tiene ecuación:
>
> $$S : F\left(x - \frac{v_1}{v_3}z, y - \frac{v_2}{v_3}z\right) = 0.$$

Análogamente, si tenemos la traza en el plano xz dada por $\mathcal{C} : F(x, z) = 0$ y $v_2 \neq 0$, entonces la ecuación será $S : F\left(x - \frac{v_1}{v_2}y, z - \frac{v_3}{v_2}y\right) = 0$.

Finalmente, si tenemos la traza en el plano yz dada por $\mathcal{C} : F(y, z) = 0$ y $v_1 \neq 0$, entonces la ecuación será $S : F\left(y - \frac{v_2}{v_1}x, y - \frac{v_3}{v_1}x\right) = 0$.

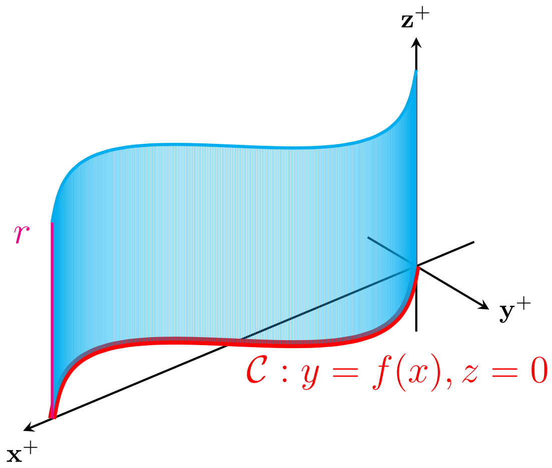
Ejemplo 13: Hallar la ecuación del cilindro cuya traza con el plano xy es $\mathcal{C} : x^2 - 4y = 0$, y sus generatrices son paraleleas al vector $\mathbf{v} = (1, 1, 3)$.

Aquí $v_1 = v_2 = 1$ y $v_3 = 3 \neq 0$, y la directriz tiene ecuación $F(x, y) = x^2 - 4y$. Luego la ecuación será $S : \left(x - \frac{1}{3}z\right)^2 - 4\left(y - \frac{1}{3}z\right) = 0$.

2.1 Cilindros rectos

Ahora veremos el caso en que conocemos la directriz, pero la generatriz es paralela a un eje coordenado.

Se denomina *cilindro recto* a aquel en que la directriz $\mathcal{C}$ está contenida en un plano coordenado y la generatriz r se mueve de manera paralela al eje perpendicular al plano.



La característica que tendrán los cilindros rectos, es que sus ecuacion será muy sencilla: la ecuación de la superficie será la de la directriz, y la variable ausente corresponderá al eje paralelo a las generatrices.

En otras palabras, si el cilindro es generado, por ejemplo, por una curva $\mathcal{C}: F(x, z) = 0$, contenida en el plano xz, su ecuación será $S : F(x, z) = 0$, y las generatrices (paralelas al eje y), tendrán por ecuación $r : x = x_0, z = z_0$.

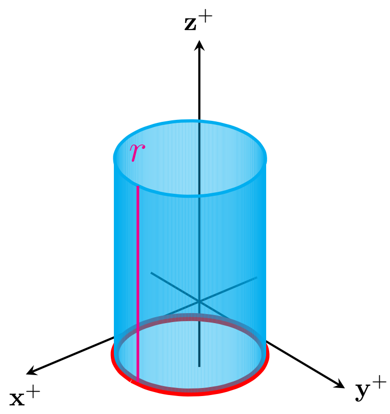
2.2 Algunos cilindros rectos destacados

2.2.1 Cilindro circular recto

La curva directriz es una circunferencia y la generatriz una recta paralela a un eje. **Ejemplo 14:**

Si la curva directriz está en el plano xy, entonces es de la forma $\mathcal{C} : (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$. Y podemos tomar como generatriz cualquier recta que pase por la circunferencia y que sea paralela al eje z, $r : x = x_1, y = y_1$, donde $P(x_1, y_1, 0)$ está en el círculo.

La ecuación de la superficie será $S : (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.



$\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 1, z = 0$

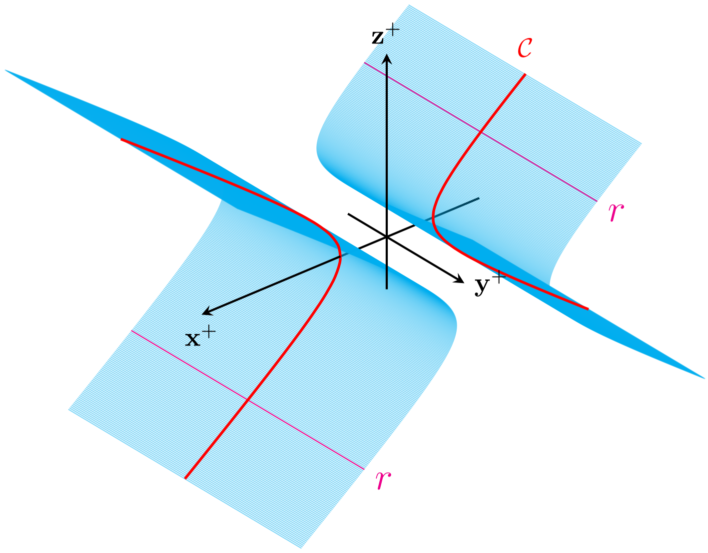
2.2.2 Cilindro hiperbólico recto

La curva directriz es una hipérbola y la generatriz una recta paralela a un eje.

Como la hipérbola tiene dos ramas, el cilindro hiperbólico también tendrá dos partes.

Ejemplo 15: Tomemos como curva directriz la siguiente hipérbola en el plano xz, $\mathcal{C}: \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{b^2} = 1$. Y por cada rama de la hipérbola, tomamos como generatriz la recta paralela al eje y que pase por la curva $\mathcal{C}$.

La ecuación de la superficie será $S: \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{b^2} = 1$



2.2.3 Cilindro parabólico recto

La curva directriz es una parábola y la generatriz una recta paralela a un eje.

Ejemplo 16: Tomamos como curva directriz $\mathcal{C}: z = y^2 - y$, que está contenida en el plano. Y como recta generatriz, podemos tomar al eje x, que pasa por el origen O, que se encuentra en la curva.

La ecuación de la superficie será $S: z = y^2 - y$.