Cuádricas

1 Cuádricas

Luego de los planos y los cilindros, las superficies más sencillas son las generadas por ecuaciones de segundo orden con todas la variables (es decir, que haya variables elevadas al cuadrado). Este tipo de superficies se denominan *cuádricas*.

1.1 Expresión general de las cuádricas

La *ecuación general* **incompleta** *de las superficies cuádricas* es:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0$$

La expresión se denomina incompleta porque los denominados *términos rectangulares* o *mixtos* xy, xz, yz no forman parte de la ecuación (en el caso más general, que no consideraremos, esos términos también forman parte de la ecuación *general* **completa**).

Los coeficientes A, B, C se denominan *cuadráticos*, mientras que D, E, F son los coeficientes *lineales*. El coeficiente G se denomina *independiente* o *constante*.

Las trazas paralelas a los planos coordenados de las superficies descriptas por la ecuación general, siempre son cónicas (pueden ser degeneradas).

Recordemos que una cónica es degenerada si es solución de una ecuación de segundo orden en dos variables y consiste en un par de rectas o un punto.

Ejemplo 1: Consideremos la cuádrica $\dfrac{x^2}{9} - y^2 + 2x - 2z - 1 = 0$.

Podemos ver claramente que es una cuádrica donde $A = \dfrac{1}{9}$, $B = -1$, $C = 0$, $D = 2$, $E = 0$, $F = -2$ y $G = -1$ (recordemos que los coeficientes de los términos que no aparecen valen cero).

Analicemos alguna de sus trazas:

Trazas paralelas al plano xy, es decir, intersecciones con planos $z = k$.

Poniendo $z = k$ en la ecuación de la superficie, tendremos $\dfrac{x^2}{9} - y^2 + 2x - 2k - 1 = 0$, luego la ecuación de esas trazas será

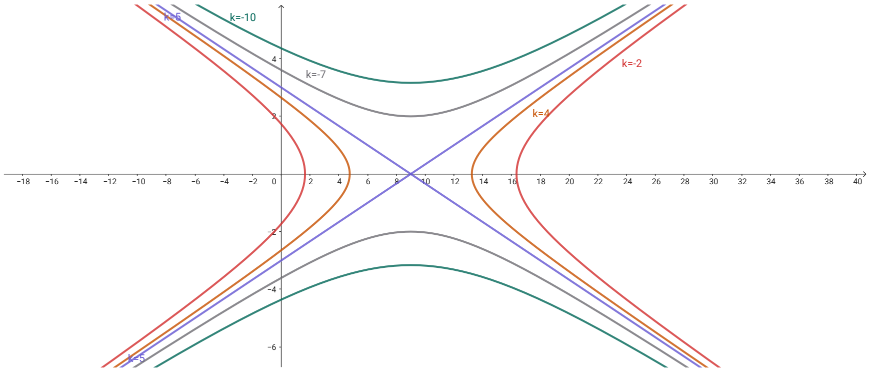
$$\mathcal{C} : \frac{x^2}{9} - y^2 + 2x = 1 + 2k, z = k$$

completando cuadrados tendremos

$$\mathcal{C} : \frac{(x-9)^2}{9} - y^2 = 2(5 + k), z = k$$

Notemos que si $k > -5$ entonces las trazas son hipérbolas centradas en $C(9, 0, k)$ con eje principal paralelo al eje x. Si $k < -5$ tienen el mismo centro, pero eje principal paralelo al eje y. Si $k = -5$, la traza es una cónica degenerada que consiste en un par de rectas.

Notemos que a medida que k se aleja de -5, tendremos que $a = \sqrt{18|k + 5|}$ y $b = \sqrt{2|k + 5|}$ se hacen más grandes (los vértices de las hipérbolas "se alejan" del centro).



1.2 Tipos de cuádricas

Una observación importante es que S es una cuádrica dada por una ecuación

$$S : Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0,$$

entonces, multiplicar todo por -1 también nos da una expresión equivalente que permite definir a S:

$$S : -Ax^2 - By^2 - Cz^2 - Dx - Ey - Fz - G = 0,$$

A continuación, presentamos 6 tipos de superficies que son representativas. La clasificación ciertas condiciones que deberán cumplirse respecto a los signos de los coeficientes, pero se sobreentiende que dicha condición bien podría cumplirse multiplicando toda la expresión correspondiente por -1.

1.2.1 Elipsoide.

Es la cuádrica donde los tres coeficientes cuadráticos $A, B, C > 0$ y el independiente verifica $G < 0$.

Ejemplo canónico: Consideremos el elipsoide definido por $S : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$

Los puntos $A(\pm a, 0, 0)$, $B(0, \pm b, 0)$ y $C(0, 0, \pm c)$ son los *vértices* del elipsoide, y los segmentos entre vértices del mismo tipo determinan los *ejes*.

Sus trazas, paralelas a cualquier plano coordenado son elipses.
Ejemplo 2: La superficie $S : -3x^2 - 2y^2 - z^2 - 2x + 1 = 0$ es un elipsoide. Notemos que multiplicando por -1 toda la expresión obtengo $S : 3x^2 + 2y^2 + z^2 + 2x - 1$, obtengo $A = 3$, $B = 2$, $C = 1$, $G = -1 < 0$.

1.2.2 Hiperboloide de una hoja

Es la cuádrica donde hay dos coeficientes cuadráticos A, B, C positivos y uno negativo, y además $G < 0$.

Ejemplo canónico: Consideremos el hiperboloide definido por $S : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$

La trazas paralelas al plano xy son elipses. Mientras que las paralelas al plano yz o xz son hipérbolas.
Ejemplo 3: La ecuación $S : -x^2 - \dfrac{y^2}{2} + z^2 + 1 = 0$ es un hiperboloide de una hoja. Multiplicando la expresión por -1 obtenemos $S : x^2 + \frac{y^2}{2} - z^2 - 1 = 0$, y aquí se cumple que $A = 1$, $B = \dfrac{1}{2}$, $C = -1 < 0$ y $G < 0$.

1.2.3 Hipérboloide de dos hojas

Es la cuádrica donde hay dos coeficientes cuadráticos A, B, C positivos y uno negativo, y además $G > 0$.

Ejemplo canónico: Consideremos el hiperboloide definido por $S : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1.$

Esta superficie tienen dos partes. En los planos paralelos al plano xy que intersecan la superficie, las trazas son elipses. En los planos paralelos a xz y yz, las trazas son hipérbolas.

1.2.4 Paraboloide elíptico

Es la cuádrica donde hay dos coeficientes cuadráticos A, B, C positivos y el otro nulo. Además el coeficiente lineal D, E, F correspondiente al cuadrático nulo, debe ser distinto de cero.

Ejemplo canónico: Consideremos el paraboloide definido por por $S : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z.$

Aquí notemos que $C = 0$, entonces debe ocurrir $F \neq 0$ (en efecto, en este ejemplo $F = -1$).

La traza en el plano xy es un punto (el origen O), y las trazas paralelas al plano xy son elipses. Las trazas paralelelas a los eje xz y yz son parábolas.

1.2.5 Hiperboloide parabólico (silla de montar)

Es la cuádrica donde hay un coeficiente A, B, C positivo, uno negativo y el tercero nulo. Además el coeficiente lineal D, E, F correspondiente al cuadrático nulo, debe ser distinto de cero.

Ejemplo canónico: Es la superficie dada por $S : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = z.$

Aquí notemos que $C = 0$, entonces debe ocurrir $F \neq 0$ (en efecto, en este ejemplo $F = -1$).

La traza en el plano xy es un par de rectas $y = \pm b\dfrac{x}{a}$. Las trazas paralelas al plano xy son hipérbolas (cuyo eje principal varía dependiendo de la altura del plano). Las trazas paralelas a los planos xz y yz son parábolas.

1.2.6 Cono elíptico

Es la superficie donde hay dos coeficientes A, B, C positivos, uno negativo y $G = \dfrac{D^2}{4A} + \dfrac{E^2}{4B} + \dfrac{F^2}{4C}$ (entenderemos mejor esta condición cuando veamos las cuádricas con centro).

Ejemplo canónico: Es la superficie dada por $S : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = z^2.$

Aquí $A = \dfrac{1}{a^2}$, $B = \dfrac{1}{b^2}$, $c = -1$, y $D = E = F = G = 0$ que cumplen trivialmente la condición.

La superficie tiene dos partes, unidas por el vértice en O. La traza en el plano xy es dicho punto (el origen O), y las trazas paralelas al plano xy son elipses. Las trazas paralelas a los planos xz y yz son hipérbolas.

1.3 Cuádricas degeneradas

Recordemos que denominamos *cuádrica* a toda superficie definible a través de la ecuación general incompleta de segundo grado en dos variables. Hay algunas soluciones a esa ecuación que no representa superficies tan suaves como las mencionadas antes.

Casos especiales: Si hubiera una variable faltante en la ecuación de una cuádrica, por ejemplo si $C = F = 0$ (falta la variable z), y tampoco hubiera términos lineales (es decir $D = E = 0$) podemos obtener:

- un cilindro recto si $A, B, G > 0$,
- un cilindro hiperbólico si $A > 0$, $B < 0$, $G > 0$,
- dos planos paralelos si $A > 0$, $B = 0$, $G > 0$,

- un eje si $A, B > 0$, $G = 0$,
- dos planos que se cortan si $A > 0$, $B < 0$, $G = 0$.
- un cilindro parabólico si $A \neq 0$, $B = 0$, y también $E \neq 0$.

así resulta que *los cilindros rectos, parabólicos e hiperbólicos, planos, rectas también son cuádricas*.

Por ello, junto al cono elíptico y el punto (caso $A, B, C > 0$ y $D = E = F = G = 0$) forman el conjunto de las denominadas *cuádricas degeneradas*.

1.4 Cuádricas con centro

De manera análoga a lo realizado con las cónicas, dada una ecuación cuádrica, nos interesa saber cuál es la superficie descripta, y eso lo haremos completando cuadrados.

Si al completar cuadrados obtengo una superficie con ecuación

$$S : A' \underbrace{(x - x_0)}_{\bar{X}}{}^2 + B' \underbrace{(y - y_0)}_{\bar{Y}}{}^2 + C' \underbrace{(z - z_0)}_{\bar{Z}}{}^2 + D' = 0,$$

obtengo una *cuádrica con centro* $C(\bar{X} = 0, \bar{Y} = 0, \bar{Z} = 0) \equiv C(x_0, y_0, z_0)$.

La cuádrica tendrá centro, si completando cuadrados logro una expresión como la anterior.

El elipsoide, el hiperboloide de una y dos hojas, y el cono elíptico, se denominan *cuádricas con centro.*

En cambio *los paraboloides no tienen centro de simetría.* La falta de algún término cuadrático, impide que al completar cuadrados, se logre una expresión como la señalada.

Ejemplo 4: Determinar el tipo de cuádrica descripto por $S : x^2 + 4y^2 - x + 4y + z - 1 = 0$ y hallar su centro.

Procedemos reagrupando y completando cuadrados:

$$\begin{aligned}
x^2 + 4y^2 - x + 4y + z - 1 = x^2 - x + 4y^2 + 4y + z - 1 &= 0 \\
&= \left(x^2 - 2\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + \left((2y)^2 + 2\,(2y) + 1 - 1\right) + z - 1 = \\
&= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (2y+1)^2 + z - \frac{1}{4} - 1 - 1 \\
&= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{9}{4}\right) = 0
\end{aligned}$$

Ahora analizamos la última expresión:

$$\underbrace{\left(x - \frac{1}{2}\right)}_{\bar{X}}{}^2 + 4\underbrace{\left(y + \frac{1}{2}\right)}_{\bar{Y}}{}^2 + \underbrace{\left(z - \frac{9}{4}\right)}_{\bar{Z}} = 0 \quad \Rightarrow \bar{X}^2 + 4\bar{Y}^2 = -\bar{Z}$$

y concluímos que la superficie es un paraboloide elíptico.

Como se trata de un paraboloide elíptico, la superficie no tiene centro.

Ejemplo 5: Dar la ecuación y clasificar la cuádrica S con centro $C(x_0, 3, 1)$, que pasa por $P(1, 1, 2)$, y su traza con el plano xz es la cónica $\mathcal{C} : 2x^2 - 4z^2 - 8x + 8z + 11 = 0$.

Si tiene centro $C(x_0, 3, 1)$, la cuádrica tiene ecuación $S : A'(x - x_0)^2 + B'(y - 3)^2 + C'(z - 1)^2 + D' = 0$.

Al cortarla con el plano $\pi : y = 0$ obtengo la traza $\mathcal{C} : A'(x - x_0)^2 + B'9 + C'(z - 1)^2 + D' = 0$.

Ahora analizo la expresión de esa traza completando cuadrados:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 4z^2 - 8x + 8z + 11 &= 2(x^2 - 4x) - 4(z^2 - 2z) + 11 = 0 \\ &= 2(x - 2)^2 - 8 - 4(z - 1)^2 + 4 + 11 = 0 \\ &= 2(x - 2)^2 - 4(z - 1)^2 + 7 = 0 \end{aligned}$$

Ahora comparamos término a término y obtenemos $A' = 2$, $x_0 = 2$, $C' = -4$ y $9B' + D' = 7$, de donde obtenemos que

$$D' = 7 - 9B'$$

Luego, la ecuación nos queda $S : 2(x - 2)^2 + B'(y - 3)^2 - 4(z - 1)^2 + 7 - 9B' = 0$.

Como sabemos que $P(1, 1, 2)$ está en S, vale

$$2 + 4B' - 4 + 7 - 9B' = 0, \Rightarrow 5 - 5B' = 0 \Rightarrow B' = 1,\ D' = -2$$

Finalmente, obtenemos que la cuádrica es

$$S : 2(x - 2)^2 + (y - 3)^2 - 4(z - 1)^2 - 2 = 0$$

y la ecuación corresponde a un hiperboloide de una hoja.

Ejemplo 6: Dar la ecuación y clasificar la cuádrica S, cuya traza con el plano coordenado yz es $\mathcal{C}_1 : y^2 - 4y - z + 4 = 0$ y su traza con el plano $\pi : y = 2$ es $\mathcal{C}_2 : x^2 - 2x - z = 0$.

Sabemos que nuestra cuádrica tiene ecuación $S : Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0$.

Si hacemos $x = 0$, obtenemos la traza $\mathcal{C}_1 : By^2 + Cz^2 + Ey + Fz + G = 0$. Comparando con $\mathcal{C}_1 : y^2 - 4y - z + 4 = 0$ obtenemos $B = 1$, $C = 0$, $E = -4$, $F = -1$ y $G = 4$.

Luego, nuestra superficie estará dada por $S : Ax^2 + y^2 + Dx - 4y - z + 4 = 0$.

Si hacemos $y = 2$, obtenemos la traza $\mathcal{C}_2 : Ax^2 + 4 + Dx - 8 - z + 4 = Ax^2 + Dx - z = 0$. Comparando con $\mathcal{C}_2 : x^2 - 2x - z = 0$ obtenemos $A = 1$, $D = -2$.

Finalmente la superficie estará dada por

$$\begin{aligned} S :& x^2 + y^2 - 2x - 4y - z + 4 = 0 \\ & (x - 1)^2 + (y - 2)^2 - (z + 1) = 0 \\ & \bar{X}^2 + \bar{Y}^2 - \bar{Z} = 0 \end{aligned}$$

Y la cuádrica es un paraboloide elíptico.

Ejemplo 7: Dar la ecuación y clasificar la cuádrica S con centro $C(x_0, 2, 1)$, que pasa por $P(0, 0, 1)$, y su traza con el plano $\pi : z = 2$ es la cónica $\mathcal{C} : 3x^2 - 2y^2 - 6x + 8y - 6 = 0$.

Si tiene centro $C(x_0, 2, 1)$, la cuádrica tiene ecuación $S : A'(x-x_0)^2 + B'(y-2)^2 + C'(z-1)^2 + D' = 0$.

Al cortarla con el plano $\pi : z = 2$ obtengo la traza $\mathcal{C} : A'(x - x_0)^2 + B'(y - 2)^2 + C' + D' = 0$.

Ahora analizo la expresión de esa traza completando cuadrados:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 2y^2 - 6x + 8y - 6 &= 3(x^2 - 2x) - 2(y^2 - 4y) - 6 = 0 \\ &= 3(x - 1)^2 - 3 - 2(y - 2)^2 + 8 - 6 = 0 \\ &= 3(x - 1) - 2(y - 2)^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Ahora comparamos término a término y obtenemos $A' = 3$, $x_0 = 1$, $B' = -2$ y $C' + D' = -1$, de donde obtenemos que

$$D' = -1 - C'$$

Luego, la ecuación nos queda $S : 3(x - 1)^2 - 2(y - 2)^2 + C'(z - 1)^2 - 1 - C' = 0$.

Como sabemos que $P(0, 0, 1)$ está en S, vale

$$3 - 8 - 1 - C' = 0, \Rightarrow C' = -6 \Rightarrow D' = -1 - (-6) = 5$$

Finalmente, obtenemos que la cuádrica es

$$S : 3(x - 1)^2 - 2(y - 2)^2 - 6(z - 1)^2 + 5 = 0$$

y la ecuación corresponde a un hiperboloide de una hoja.