# Vectores en el plano (parte I)

## 1 Magnitudes escalares y vectoriales

Las magnitudes escalares son aquellas que se caracterizan mediante un número real con una unidad apropiada de medida.

**Ejemplo 1:** La temperatura, el peso de una persona, la altura de un edificio son magnitudes escalares. Se representan con un número seguido de la unidad de medida correspondiente (grado celcius, kilogramo, metro, etc.)

Las magnitudes vectoriales son aquellas que se caracterizan por tener intensidad, dirección y sentido.

**Ejemplo 2:** Las magnitudes vectoriales permiten representar un proceso que está teniendo lugar: desplazamiento, aplicación de una fuerza, etc.

**Ejemplo 3:** Ejemplo clásico: un objeto móvil se desplaza en línea recta desde un punto inicial $A$ a una cierta velocidad constante.


(a) Caso de poca velocidad (b) Caso de mucha velocidad

Figure 1: Dos vectores velocidad en diferentes situaciones.

Las magnitudes vectoriales nos permiten representar de manera compacta mucha más información que las escalares.

Es decir, vamos a ver que un vector nos permite guardar y trabajar más información que un número.

## 2 Vector

Toda recta $r$ determina una *dirección*. Dos puntos $A$ y $B$ de $r$ determinan un *segmento* $\overline{AB}$. Si seleccionamos a $A$ como origen y al punto $B$ como extremo, determinamos un *sentido* u *orientación*. Entonces obtenemos el segmento orientado $\overrightarrow{AB}$.

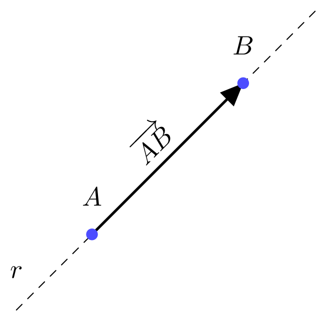



Figure 2: Segmento orientado

> Denominamos **vector** a todo segmento de recta orientado. Escribiremos $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$.

- La recta $r$ se denomina *dirección* o *recta de accion* del vector.
- La longitud del segmento $\overline{AB}$, se denomina *módulo* del vector, y lo representamos como $\|\mathbf{v}\|$.

# 3 Vectores en el plano: representación

## 3.1 Gráfica

Un vector puede ser representado como una flecha desde un punto de origen al punto terminal. Por ejemplo, el vector $\mathbf{v}$ que va del punto $A(1,2)$ al punto $B(4,6)$ puede representarse como una flecha apuntando de $A$ a $B$. Ver la figura 2

## 3.2 Simbólica

A un vector lo podemos escribir como $\overrightarrow{AB}$ ó $\mathbf{v}$, aunque a veces podemos escribir también $\overrightarrow{v}$.

## 3.3 Algebraica

Algebraicamente, un vector se representa mediante coordenadas como $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$. Veamos de dónde sale esto:

Si el vector $V$ tiene origen en el punto $A$ y extremo en $B$, entonces aplicando el vector $v$ al punto $A$ se obtiene el punto $B$, escribiendo entonces tendremos $A + \mathbf{v} = B$, o bien, $\mathbf{v} = B - A$. Por esto, consideraremos en general a los vectores como *diferencia de puntos*.

> El vector $\mathbf{v}$ con origen en $A(x_1, y_1)$ y extremo $B(x_2, y_2)$ lo representaremos como $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

**Ejemplo 4:** El vector que va del origen $(1,0)$ al punto $(3,4)$ se representa como $\mathbf{v} = (3-1, 4-0) = (2,4)$.

### 3.3.1 Vector posición

Cada punto $P(x,y)$ del plano tiene asociado un *vector posición* $\mathbf{p} = \overrightarrow{OP}$ con origen en el centro de coordenadas $O$ y extremo en $P$.

Al vector posición del punto $P(x, y)$ lo expresamos en función de sus coordenadas como $\mathbf{p} = \overrightarrow{OP} = (x, y)$.

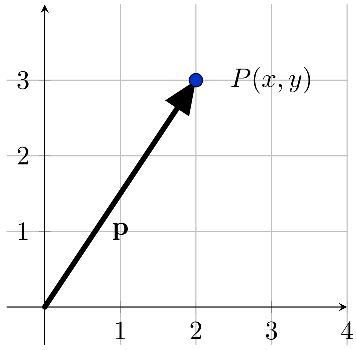



Figure 3: Vector posición $\mathbf{p}$ del punto $P(x, y)$

Si represento algebraicamente el vector que une los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ tengo $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, pero eso es lo mismo que seleccionar el vector posición que tiene dirección paralela, mismo sentido y e igual magnitud. En efecto: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$ con $P(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

**Ejemplo 5:** Dibujar los vectores $\overrightarrow{AB}$, donde $A(1, 3)$, $B(2, 1)$, y el vector posición $\mathbf{p} = (1, -2)$. Ambos vectores son el mismo, solo que en el primer caso lo dibujo con origen en el punto de aplicación (porque lo conozco), y en el segundo dibujo el vector posición correspondiente.

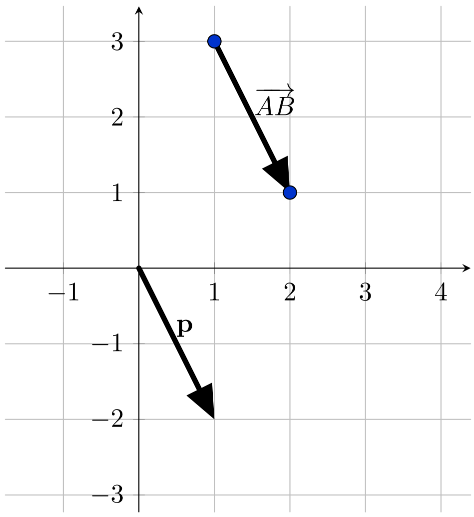



Figure 4: Vectores con direcciones paralelas, igual sentido y magnitud. El vector $\mathbf{p}$ es el vector posición.

# 4 Operaciones con Vectores

### 4.0.1 Suma de Vectores

La suma de dos vectores $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ y $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ es $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_x + v_x, u_y + v_y)$.

**Ejemplo 6:** Sean $\mathbf{u} = (1, 3)$, $\mathbf{v} = (2, 5)$. Calcular $\mathbf{u} + \mathbf{v}$.

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \underbrace{(1, 3)}_{\mathbf{u}} + \underbrace{(2, 5)}_{\mathbf{v}} = (1 + 2, 3 + 5) = (3, 8).$$

### 4.0.2 Resta de Vectores

La resta de dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es $\mathbf{u} - \mathbf{v} = (u_x - v_x, u_y - v_y)$.

**Ejemplo 7:** Sean $\mathbf{u} = (1, 3)$, $\mathbf{v} = (2, 5)$. Calcular $\mathbf{u} - \mathbf{v}$.

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \underbrace{(1,3)}_{\mathbf{u}} - \underbrace{(2,5)}_{\mathbf{v}} = (1-2, 3-5) = (-1, -2).$$

### 4.0.3 Multiplicación por un Escalar

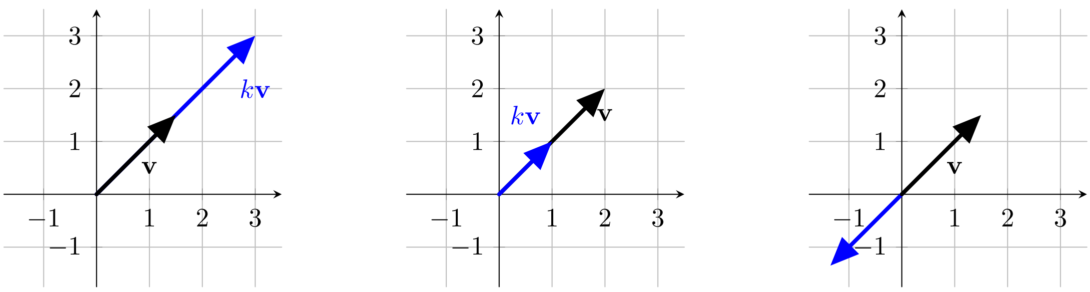
La multiplicación de un vector $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ por un escalar $k \in \mathbb{R}$ es $k\mathbf{v} = (kv_x, kv_y)$.

**Ejemplo 8:** Sea $\mathbf{u} = (1, 3)$, $k = 4$. Calcular $k\mathbf{u}$.

$$k\mathbf{u} = \underbrace{4}_{k} \underbrace{(1,3)}_{\mathbf{u}} = (4 \times 1, 4 \times 3) = (4, 12).$$

**Consecuencias del producto escalar**

La multiplicación por un escalar tiene tres efectos: dilata, contrae o cambia el sentido (dependiendo del escalar $k$)




(a) Caso $k > 1$: Dilatación (b) $0 < k < 1$: contracción (c) $k < 0$: cambio de sentido

**Vectores paralelos:**

Dos vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son *paralelos* si uno es múltiplo escalar del otro, es decir, si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $k\mathbf{w} = \mathbf{v}$.

Dos vectores paralelos están sobre la misma recta de acción

**Ejemplo 9:** $\mathbf{u} = (2, 5)$ y $\mathbf{v} = (4, 10)$ son paralelas, pues $\mathbf{v} = 2\mathbf{u}$.

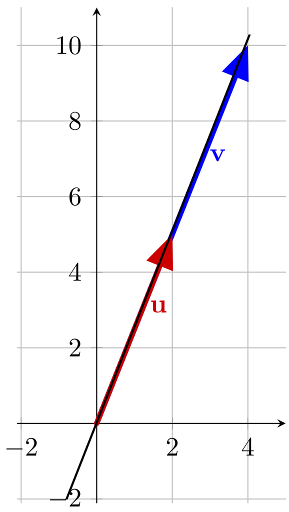



Figure 6: Vectores paralelos

## 5 Expresión canónica de vectores

Consideremos un vector $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$. Entonces podemos escribir lo siguiente:

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y) = (v_x, 0) + (0, v_y) = v_x \underbrace{(1,0)}_{\mathbf{i}} + v_y \underbrace{(0,1)}_{\mathbf{j}} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}.$$

La escritura como $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}$ la denominamos *expresion canónica* del vector. Los valores $v_x$ y $v_y$ se denominan *componentes* de $\mathbf{v}$.

La expresión canónica nos permite escribir cualquier vector como suma de otros dos más sencillos.
**Ejemplo 10:** Sea $\mathbf{u} = (1, 3)$. Dar su expresión canónica.

$$\mathbf{u} = (1, 3) = (1, 0) + (0, 3) = \mathbf{i} + 3(0, 1) = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

## 6 Módulo de Vectores

La magnitud, módulo o norma, de un vector $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ es $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

**Ejemplo 11:** El vector nulo $\mathbf{0} = (0, 0)$ es el único que tiene norma igual a cero.

**Ejemplo 12:** Sea $\mathbf{v} = (3, 4)$. Calcular su módulo:

$$\|\mathbf{v}\| = \|(3, 4)\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Un *versor* es un vector de módulo igual a 1, es decir $\|\mathbf{v}\| = 1$.

**Ejemplo 13:** Los vectores $\mathbf{i} = (1, 0)$ y $\mathbf{j} = (0, 1)$, son versores.

Todo vector $\mathbf{v}$ no nulo, nos permite obtener un versor $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{v}}{\|v\|}$.

**Ejemplo 14:** Si $\mathbf{v} = (3, 4)$, entonces $\|v\| = 5$, y obtenemos el versor $\mathbf{w} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.

### 6.1 Módulo y multiplicación por escalares

Hemos visto que si $k \in \mathbb{R}$ es un escalar, y $\mathbf{v}$ un vector, entonces el producto escalar-vector $k\mathbf{v}$ es un nuevo vector. Podemos preguntarnos entonces cuánto vale el módulo $\|k\mathbf{v}\|$.

Para todo escalar $k$ y vector $\mathbf{v}$ vale $\|k\mathbf{v}\| = |k|\|\mathbf{v}\|$.

**Demostración:** Podemos ver una breve prueba de lo anterior: si $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$, entonces

$$\|k\mathbf{v}\| = \|k(v_x, v_y)\| = \|(kv_x, kv_y)\| = \sqrt{(kv_x)^2 + (kv_y)^2} = \sqrt{k^2(v_x^2 + v_y^2)} = \sqrt{k^2}\sqrt{v_x^2 + v_y^2} = |k|\|\mathbf{v}\|.$$

## 7 Producto Escalar (Producto Punto)

El producto escalar de $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ y $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ es $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_x v_x + u_y v_y$.

**Ejemplo 15:** Sean $\mathbf{u} = (2, 3)$ y $\mathbf{v} = (5, 5)$. Calcular $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \underbrace{(2,3)}_{\mathbf{u}}, \underbrace{(5,5)}_{\mathbf{v}} \rangle = 2 \times 5 + 3 \times 5 = 10 + 15 = 25$$

### 7.1 Fórmula para el módulo

Hay una fórmula que permite relacionar el módulo de un vector mediante el producto escalar:

Para todo vector $\mathbf{v}$ vale $\|\mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$.

## 8 Ángulo entre Vectores y Proyecciones

### 8.1 Ángulo

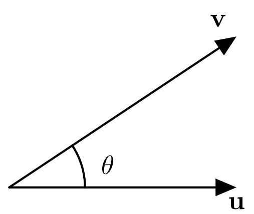



Figure 7: Dos vectores determinan un ángulo

El ángulo $\theta$ entre dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ no nulos se calcula usando $\cos(\theta) = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$.

**Ejemplo 16:** Determinar el ángulo entre los vectores $\mathbf{u} = (1,3)$ y $\mathbf{v} = (-1,2)$ (ver Figura 8). Usando la fórmula tendremos:

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{\overbrace{\langle (1,3), (-1,2) \rangle}^{\langle u,v \rangle}}{\underbrace{\sqrt{10}}_{\|\mathbf{u}\|}\,\underbrace{\sqrt{5}}_{\|\mathbf{v}\|}} = \frac{-1+6}{\sqrt{50}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \theta = \arccos(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 45°$$

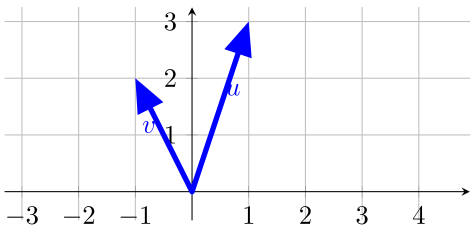



Figure 8: Vectores del ejemplo

## 8.2 Proyección

Un vector $\mathbf{u}$ se puede proyectar perpendicularmente sobre la dirección de otro $\mathbf{v}$. Ver figura 9.

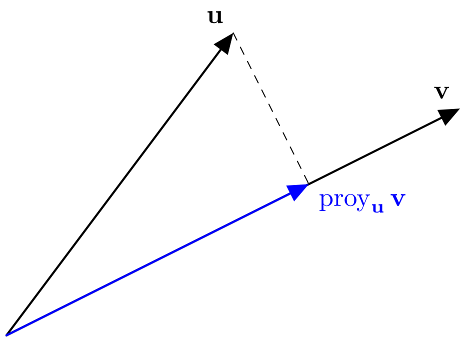



Figure 9: Proyección de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$.

Notemos que la proyección de un vector sobre otro, es un nuevo vector. Por eso, a esta operación también se la denomina ***proyección vectorial*** de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$.

La proyección de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$ no nulo es $\operatorname{proy}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \dfrac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v}$.

**Ejemplo 17:** Sean $\mathbf{u} = (3,4)$ y $\mathbf{v} = (6,2)$. Calcular la proyeccion $\operatorname{proy}_{\mathbf{v}} \mathbf{u}$.

Usamos la fórmula

$$\operatorname{proy}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v} = \frac{\overbrace{26}^{\langle u,v \rangle}}{\underbrace{40}_{\|v\|^2}}\underbrace{(6,2)}_{\mathbf{v}} = \left( \frac{26 \times 6}{40}, \frac{26 \times 2}{40} \right) = (3.9, 1.3)$$

Cálculos auxiliares:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3 \times 6 + 4 \times 2 = 18 + 8 = 26$$

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 6 \times 6 + 2 \times 2 = 36 + 4 = 40$$

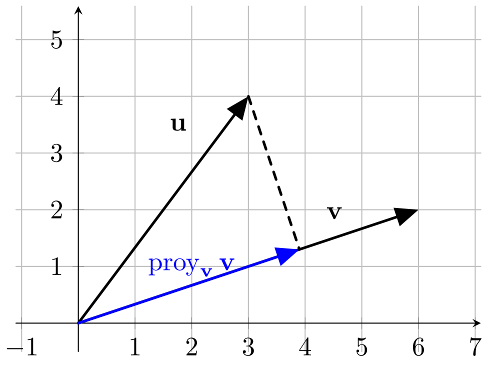



Figure 10: ejemplo de proyeccion

### 8.2.1 Casos a tener en cuenta

Cuando determinamos $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$, el vector $\mathbf{u}$ se proyecta sobre la dirección de $\mathbf{v}$ (es decir la línea que contiene a $\mathbf{v}$). Así tenemos tres posibilidades: que la proyección esté dentro de $\mathbf{v}$, fuera, o apuntando en dirección opuesta.

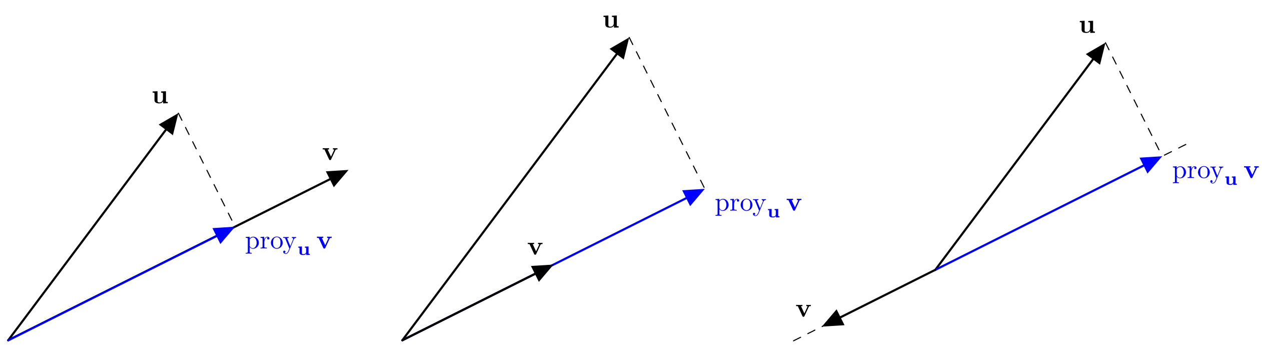



Figure 11: Casos posibles

### 8.2.2 Proyección escalar

Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores, se denomina *proyección escalar* a la siguiente expresión:

$$\text{proy esc}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|}$$

Siempre hay que tener en cuenta que la proyección $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ es un vector, y la proyección escalar $\text{proy esc}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ es un número.

Sin embargo los dos conceptos están relacionados:

Dados $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores, valen las siguientes relaciones:

1. $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \text{proy esc}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} \quad \dfrac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$
2. $\|\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}\| = |\text{proy esc}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}|$