# Volumen y superficies de sólidos de revolución

En este capítulo nos centraremos solamente en los sólidos de revolución.

Un *sólido* es un conjunto del espacio cerrado y acotado, que tiene volumen.

Informalmente hablando, una superficie es una cáscara, mientras que un sólido es la unión de la superficie más todos los puntos que quedan encerrados por ella.

Entonces, dado un sólido, podemos intentar medir dos atributos: el volumen (el espacio que ocupa) y su superficie (el área de su cáscara). Esto lo haremos restringiéndonos a un tipo particular de sólidos:

Un *sólido de revolución* es el conjunto acotado, encerrado por una superficie de revolución.

## 1 Volumen

El volumen del sólido de revolución obtenido al girar una curva $\mathcal{C} : y = f(x)$, contenida en el plano $xy$, con $a \leq x \leq b$, alrededor del eje $x$ está dado por $V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$.

**Ejemplo 1:** Calcular el volumen del paraboloide de revolución generado por la curva $\mathcal{C} : y = \sqrt{x}$, al girar alrededor del eje $x$.

Vemos que aquí, lo variable es la longitud $h$ del paraboloide, que inicia en $x = 0$. Luego $a = 0$, $b = h$, $f(x) = \sqrt{x}$ y

$$V = \pi \int_0^h \left(\sqrt{x}\right)^2 \, dx = \pi \int_0^h x \, dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^h = \pi \frac{h^2}{2}$$

**Ejemplo 2:** Calcular el volumen del sólido de revolución generado por la curva $\mathcal{C} : y = x^2$, contenida en el plano $xy$ (¡no es un paraboloide!), entre los valores $a = 1$ y $b = 3$.

Entonces planteamos la integral $V = \pi \int_1^3 \left(x^2\right)^2 \, dx = \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_1^3 = \pi \left[\frac{3^5}{5} - \frac{1^5}{5}\right] = \pi \frac{242}{5}$.

**Ejemplo 3:** (*Volumen de la esfera*) vemos que la esfera sólida es generada por la rotación alrededor del eje $x$, del medio arco de circunferencia dado por $x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow y = \sqrt{R^2 - x^2}$, con $-R \leq x \leq R$. Así, el volumen será

$$\begin{aligned} V = \pi \int_{-R}^R \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 \, dx &= \pi \int_{-R}^R \left(R^2 - x^2\right) \, dx \\ &= \pi \left(R^2 \int_{-R}^R dx - \int_{-R}^R x^2 \, dx\right) \\ &= \pi R^2 \left[x\right]_{-R}^R - \pi \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-R}^R = \frac{4}{3}\pi R^3. \end{aligned}$$

**Ejemplo 4:** Calcular el volumen engendrado por un arco de sinusoide $y = \sin(x)$.

Aquí $f(x) = \sin(x)$, $a = 0$, $b = \pi$, y $V = \frac{\pi^2}{2}$.

## Volumen entre superficies

Consideremos ahora dos curvas contenidas en el plano $xy$, $\mathcal{C}_1 : y = f(x)$ y $\mathcal{C}_2 : y = g(x)$. Si giramos cada una, obtenemos dos sólidos de revolución $S_1$ y $S_2$. Si $S_2$ queda dentro de $S_1$, nos interesa saber cuánto volumen hay entre ellos.

Supongamos que $g(x) < f(x)$ para $a \leq x \leq b$, entonces el volumen del sólido limitado por las superficies generadas por $g$ y $f$ se determina como

$$V = \pi \int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x)\right)\, dx = V_f - V_g.$$

**Ejemplo 5:** Hallar el volumen limitado por el paraboloide generado por la curva $y = \sqrt{x}$, y el cono generado por la recta $y = x$.

Vemos que las intersecciones se dan cuando $\sqrt{x} = x \Rightarrow x = 0, 1$. Y además $g(x) = x \leq \sqrt{x} = f(x)$ si $0 \leq x \leq 1$. Luego, el volumen buscado viene dado por la integral

$$V = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{x}^2 - x^2\right)\, dx = \pi \left[\frac{x}{2}\right]_0^1 - \pi \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \pi\frac{1}{2} - \pi\frac{1}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

### 1.1 Generalización

Lo anterior lo podemos generalizar según el eje de rotación y la curva $\mathcal{C}$:

- Sea una curva $\mathcal{C} : f(x)$ con $a \leq x \leq b$, contenida en el plano coordenado $xz$ o $xy$, entonces el volumen del sólido de revolución obtenido al girarla alrededor del eje $x$ es $V = \int_a^b f(x)^2\, dx$.
- Sea una curva $\mathcal{C} : f(y)$ con $a \leq y \leq b$, contenida en el plano coordenado $xy$ o $yz$, entonces el volumen del sólido de revolución obtenido al girarla alrededor del eje $y$ es $V = \int_a^b f(y)^2\, dy$.
- Sea una curva $\mathcal{C} : f(z)$ con $a \leq z \leq b$, contenida en el plano coordenado $xz$ o $yz$, entonces el volumen del sólido de revolución obtenido al girarla alrededor del eje $z$ es $V = \int_a^b f(z)^2\, dz$.

Lo anterior nos demuestra que importa más tener en claro el eje de rotación, que el plano coordenado sobre el que está la curva $\mathcal{C}$.

**Ejemplo 6:** Determinar el volumen de la rama superior del hiperboloide de revolución dado por $S : x^2 + y^2 - z^2 = -1$.

Vemos que aquí tenemos separados los términos $x^2 + y^2$ de $z^2$, así que el eje de rotación es el eje $z$.

Como queremos calcular el volumen de la rama superior, tomamos $z \geq 0$. Por otro lado, como la curva $\mathcal{C}$ directriz de la superficie, tiene que estar en un plano coordenado, buscamos la traza contenida en el plano $yz$, es decir $x = 0$.

Reemplazamos con $x = 0$ en la ecuación de la superficie y tendremos la curva $\mathcal{C} : y^z - z^2 = -1 \Rightarrow y^2 = z^2 - 1 \Rightarrow y = \sqrt{z^2 - 1}$. Luego deducimos que, $z \geq 1$.

Supongamos que consideramos el sólido hasta una altura $z = h$, luego, el volumen de la rama superior será $V = \pi \int_1^h \left(z^2 - 1\right)\, dz = \pi\left(\frac{h^3}{3} - h - \frac{1}{3} + 1\right)$

## 2 Áreas de superficies de revolución

Nuevamente, lo imporante será reconocer el eje de rotación:

Sea una curva $\mathcal{C} : f(x)$ con $a \leq x \leq b$, contenida en el plano coordenado $xz$ o $xy$, entonces el área de la superficie de revolución obtenida al girar $\mathcal{C}$ alrededor del eje $x$ es

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left(f'\left(x\right)\right)^2}\, dx$$

**Ejemplo 7:** Hallar el área de la esfera de radio $R$.

Ya sabemos que es generada por rotación alrededor del eje $x$ del semicírculo $\mathcal{C} : y = \sqrt{R^2 - x^2} = f(x)$, con $-R \leq x \leq R$.

Tendremos $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$, y $1 + \left(f'(x)\right)^2 = 1 + \dfrac{x^2}{R^2 - x^2} = \dfrac{R^2}{R^2 - x^2}$. Luego

$$V = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx = 2\pi R \int_{-R}^{R} dx = 4\pi R^2.$$

**Ejemplo 8:** Hallar el área del cóno de altura $h$, generado al rotar una recta $ax$ alrededor del eje $x$.

Aquí $\mathcal{C} : f(x) = ax$, $0 \leq x \leq h$, y tendremos

$$V = 2\pi \int_0^h ax\sqrt{1 + a^2}\, dx = 2\pi a\sqrt{1 + a^2}\frac{h^2}{2} = a\sqrt{1 + a^2}h^2$$

Notemos que hemos calculado el *área lateral* de la figura, sin considerar la tapa.

**Ejemplo 9:** Determinar la superficie del paraboloide generado por la curva $\mathcal{C} : f(x) = \sqrt{x}$, al girar alrededor del eje $x$, entre $0 \leq x \leq h$.

Tendremos que $1 + \left(f'\left(x\right)\right)^2 = 1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4x} = \frac{4x+1}{4x}$. Luego

$$A = 2\pi \int_0^h \sqrt{x}\sqrt{\frac{4x + 1}{4x}}\, dx = \pi \int_0^h \sqrt{1 + 4x}\, dx = \pi \left[\frac{1}{6}(1 + 4x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^h = \frac{\pi}{6}\left((1 + 2h)^{\frac{3}{2}} - 1\right)$$