Vectores en el plano (parte II)

1 Aplicaciones geométricas

1.1 Ley del paralelogramo

La **ley del paralelogramo** es una forma geométrica de entender la suma de dos vectores.

Dados dos vectores $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, vimos que podemos representarlos gráficamente como segmentos orientados que parten de un mismo punto. Para sumar estos vectores usando la ley del paralelogramo, hay que realizar los siguientes pasos:

1. **Dibujar los vectores**: Colocamos los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de manera que ambos partan del mismo origen.

2. **Completar el paralelogramo**: Desde la punta de cada vector, dibujamos líneas paralelas a los otros dos lados del paralelogramo (realizamos el *transporte paralelo* de los vectores). Es decir, desde la punta de $\mathbf{u}$, dibujamos una línea paralela a $\mathbf{v}$, y desde la punta de $\mathbf{v}$, dibujamos una línea paralela a $\mathbf{u}$. Estas líneas se intersectarán formando un paralelogramo.

3. **Suma de vectores**: La diagonal del paralelogramo que parte del origen de los vectores es el vector suma $\mathbf{u} + \mathbf{v}$.

Hacer lo anterior se corresponde con la suma algebraica, donde los componentes del vector suma son simplemente la suma de los componentes correspondientes de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

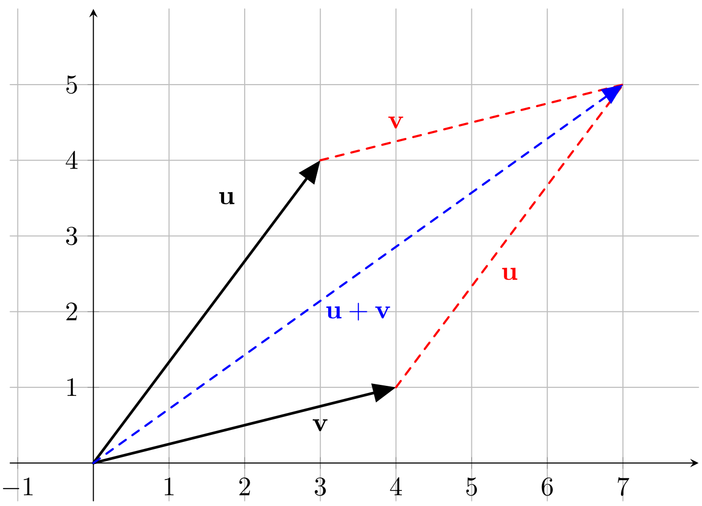

Figure 1: Ley del paralelogramo

1.1.1 Ley del paralelogramo para la resta

Ya vimos que la suma de dos vectores podemos representarla gráficamente como la diagonal del paralelogramo que inicia en el origen común de los vectores. Veamos cómo podemos usar esa regla para calular la resta $\mathbf{u} - \mathbf{v}$.

Reescribimos la resta de la siguiente manera $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$. Entonces, expresada la resta de esa forma, podemos determinar el resultado mediante la regla del paralelogramo para los vectores $\mathbf{u}$ y $-\mathbf{v}$.

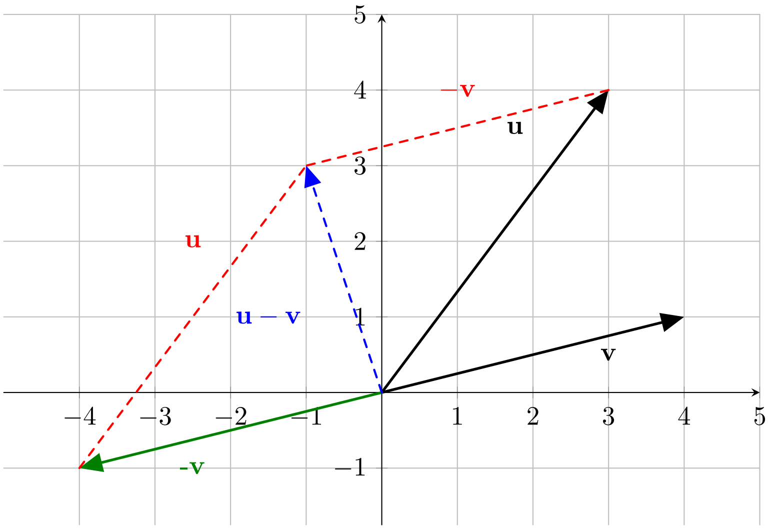

Figure 2: Ley del paralelogramo aplicada a la resta

1.2 Vectores ortogonales

Vimos que dos vectores con un origen común determinan un ángulo entre ellos. Hay un caso especial que nos interesa en particular:

> Dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ serán ortogonales (o perpendiculares) si el ángulo θ entre ellos es recto, $\theta = 90°$.

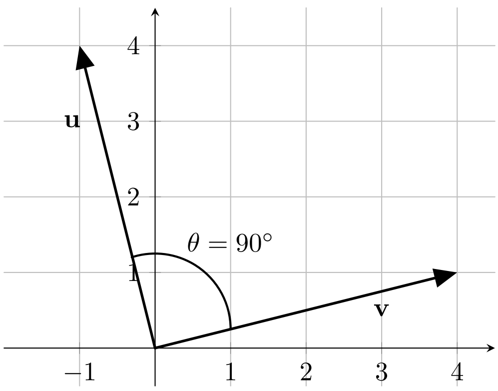

Figure 3: Vectores ortogonales

Recordemos que si $\theta = 90°$, entonces $\cos(\theta) = 0$. Luego, podemos poner este resultado en la formula del ángulo ya vista:

$$0 = \cos(\theta) = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} \quad \Rightarrow \langle u, v\rangle = 0.$$

> Dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ serán ortogonales si y solamente si $\langle u, v\rangle = 0$.

De esta manera, podemos evaluar de manera más directa la ortogonalidad entre vectores:

Ejemplo 1: El vector $\mathbf{0}$ es ortogonal a todo otro vector.

Ejemplo 2: $\mathbf{u} = (2, 4)$ y $\mathbf{v} = (-2, 1)$ son ortogonales pues $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 0$.

Ejemplo 3: Dado un vector cualquiera $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ el vector $\mathbf{w} = (-v_y, v_x)$ es ortogonal.

1.3 Componente ortogonal

Ahora reveeremos la proyección de un vector $\mathbf{u}$ sobre otro $\mathbf{v}$:

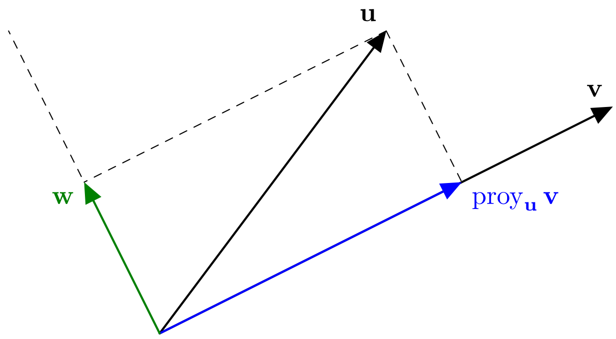

Figure 4: Proyección de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$ y su componente ortogonal $\mathbf{w}$.

Hemos visto que si proyectamos a $\mathbf{u}$ sobre la recta que contiene a $\mathbf{v}$, entonces obtenemos la proyección $\operatorname{proy}_\mathbf{v}\mathbf{u}$.

También podríamos intentar proyectar a $\mathbf{u}$ sobre la recta *perpendicular* a la dirección de $\mathbf{v}$, y así obtener el vector $\mathbf{w}$ de la Figura 5.

Como $\operatorname{proy}_\mathbf{v}\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$ están en direcciones perpendiculares, entonces son vectores ortogonales entre si. Y por la regla del paralelogramo, vemos que $\operatorname{proy}_\mathbf{v}\mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{u}$, esto nos permite despejar al vector $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \operatorname{proy}_\mathbf{v}\mathbf{u}$.

Se denomina *componente ortogonal* de $\mathbf{u}$ respecto de $\mathbf{v}$ al vector

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \operatorname{proy}_\mathbf{v}\mathbf{u} = \mathbf{u} - \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v}.$$

En resumen, dados dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, entonces podemos descomponer $\mathbf{u}$ a través de $\mathbf{v}$ mediante la proyección y el complemento ortogonal. Es decir *podemos usar un vector para descomponer a otro como una suma.*

Ejemplo 4: Sean $\mathbf{u} = (3, 4)$ y $\mathbf{v} = (6, 3)$, calculemos la componte ortogonal de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$. Lo primero que haremos será calular $\operatorname{proy}_\mathbf{v}\mathbf{u}$:

$$\operatorname{proy}_\mathbf{v}\mathbf{u} = \frac{\langle (3, 4), (6, 3)\rangle}{\|36 + 9\|^2}\mathbf{v} = \frac{30}{45}(6, 3) = (4, 2).$$

Luego $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \operatorname{proy}_\mathbf{v}\mathbf{u} = (3, 4) - (4, 2) = (-1, 2)$ será la componente ortogonal buscada.

Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores, y $\mathbf{w}$ la proyección ortogonal de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$. Entonces valen las siguientes propiedades:

1. $\langle \operatorname{proy}_\mathbf{v}\mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle = 0$ (son ortogonales).
2. $\|\operatorname{proy}_\mathbf{v}\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2$ (Pitágoras).

2 Rectas

En materias anteriores se ha visto que una recta puede escribirse de manera explícita como una función que relaciona la coordenadas x y y, y la escribimos mediante la fórmula $y = mx+b$ (denominada *ecuación explícita de la recta*).

Ejemplo 5: Dar la ecuación explícita de la recta que pasa por los puntos $P_0(-2,1)$ y $P_1(2,3)$.

Sabemos que para calcular la expresión explícita debemos buscar su pendiente $m = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{3-1}{2-(-2)} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

Luego, reemplazamos ese valor y los datos de algun punto para hallar el b: $mx_0+b = y_0 \Rightarrow \dfrac{1}{2}(-2)+b = 1 \Rightarrow b = 1+1 = 2$.

Así obtenemos la ecuación de la recta $y = \dfrac{1}{2}x + 2$.

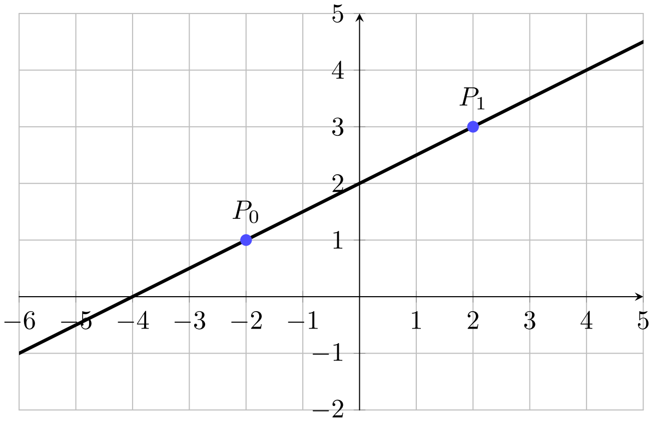

Figure 5: Recta que pasa por dos puntos.

2.1 Ecuación vectorial de la recta

Ahora veremos que toda recta puede escribirse como una función entre un *parámetro* t y vectores posición.

> Dado un vector $\mathbf{r}_0$ (denominado *vector director*) y un punto $P_0(x_0, y_0)$, la recta paralela a $\mathbf{r}_0$ que pasa por P_0 está dada por
>
> $$\mathbf{r} = t\mathbf{r}_0 + P_0.$$
>
> La expresión anterior se denomina *ecuación vectorial de la recta.*

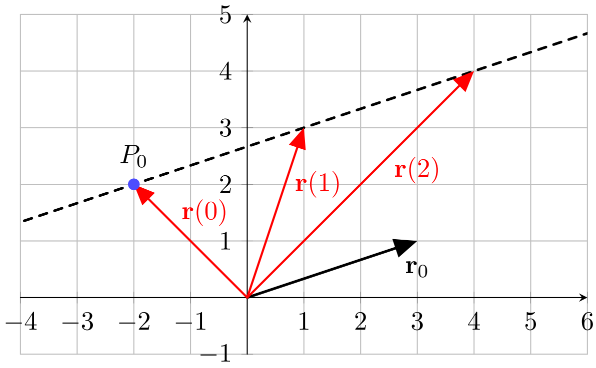

Figure 6: Vectores posición con extremo en la recta.

Ejemplo 6: Volvamos a la recta que pasa por los puntos $P_0(-2,1)$ y $P_1(2,3)$, y hallemos alguna expresión vectorial.

El vector director será $\mathbf{r}_0 = P_1 - P_0 = (2-(-2), 3-1) = (4,2)$. Y sabemos que pasa por P_0. Luego la recta será $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{r}_0 + P_0 = t(4,2) + (-2,1)$.

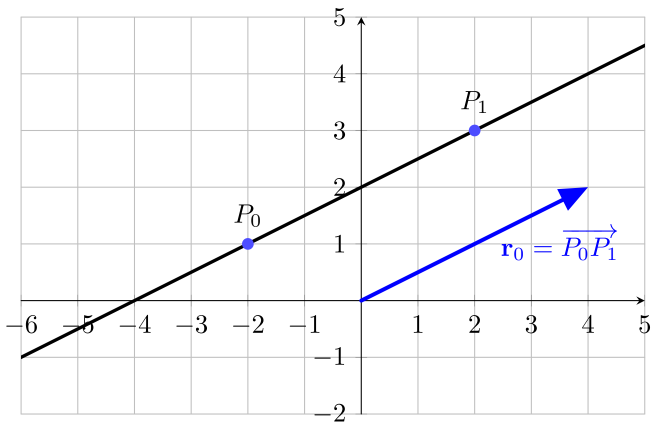

Figure 7: Recta que pasa por dos puntos. $\mathbf{r}_0$ es un vector director de la recta.

Algunas observaciones:

1. Si r es la recta paralela a $\mathbf{r}_0$ que pasa por P_0, entonces la ecuación vectorial $\mathbf{r}(t)$ nos da los vectores posición de los puntos de la recta.
2. La expresión vectorial de la recta la recorre en el sentido determinado por el vector $\mathbf{r}_0$.
3. Cuando graficamos la recta determinada por su expresión vectorial, **el parámetro t no se grafica**.
4. Dos rectas con el mismo vector director $\mathbf{r}_0$ son paralelas.
5. Si dos vectores directores $\mathbf{r}_0$ y $\mathbf{n}_0$ son ortogonales, las rectas que determinen serán perpendiculares.

2.2 Ecuación paramétrica de la recta

Supongamos que dado un vector director $\mathbf{r}_0$ y un punto $P_0(x_0, y_0)$ consideramos la recta determinada por los puntos cuyos vectores posición están dados por la ecuación vectorial $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{r}_0 + P_0$.

Entonces, supongamos que $\mathbf{r}_0 = (r_x, r_y)$, y queremos hallar las componentes del vector $\mathbf{r} = (x, y)$, entonces

$$(x, y) = \mathbf{r} = t\mathbf{r}_0 + P_0 = t(r_x, r_y) + (x_0, y_0) = (tr_x + x_0, tr_y + y_0),$$

así llegamos al sistema

$$\begin{cases} x = tr_x + x_0 \\ y = tr_y + y_0. \end{cases}$$

El sistema anterior se denomina *ecuación paramétrica de la recta.*

Ejemplo 7: Volvamos a la recta que pasa por los puntos $P_0(-2, 1)$ y $P_1(2, 3)$, y hallemos una expresión paramétrica.

Ya vimos que un vector director es $\mathbf{r}_0 = (r_x, r_y) = (4, 2)$, y que pasa por $P_0(x_0, y_0) = (-2, 1)$, luego una expresión paramétrica será $\begin{cases} x = 4t - 2 \\ y = 2t + 1 \end{cases}$

2.3 Ecuación simétrica de la recta

Dada una recta paralela a $\mathbf{r}_0$ y que pasa por P_0, vimos que podemos escribirla de manera paramétrica como $\begin{cases} x = tr_x + x_0 \\ y = tr_y + y_0. \end{cases}$

Entonces podemos despejar el parámetro t de cada una de esas ecuaciones, y tendremos $t = \dfrac{x - x_0}{r_x}$ y $t = \dfrac{y - y_0}{r_y}$.

Se denomina *ecuación simétrica* de la recta a la expresión

$$\frac{x - x_0}{r_x} = \frac{y - y_0}{r_y},$$

donde el vector director $\mathbf{r}_0 = (r_x, r_y)$ no tiene componentes nulas.

Ejemplo 8: Volvamos a la recta que pasa por los puntos $P_0(-2, 1)$ y $P_1(2, 3)$, y hallemos alguna expresión simétrica.

Ya vimos que un vector director es $\mathbf{r}_0 = (r_x, r_y) = (4, 2)$, y que pasa por $P_0(x_0, y_0) = (-2, 1)$, luego una expresión simétrica será $r : \dfrac{x + 2}{4} = \dfrac{y - 1}{2}$.

2.4 Ecuación implícita de la recta

Nuevamente, consideremos la recta paralela a $\mathbf{r}_0$ que pasa por $P_0(x_0, y_0)$, entonces los vectores posición de los puntos de la recta están dados por $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{r}_0 + P_0$, así

$$\mathbf{r}(\mathbf{t}) - P_0 = t\mathbf{r}_0.$$

Es decir, el vector $\mathbf{r}(\mathbf{t}) - P_0 = (x - x_0, y - y_0)$ y $\mathbf{r}_0$ serán paralelos.

Sea $\mathbf{n}_0 = (n_x, n_y)$ un vector ortogonal a $\mathbf{r}_0$, entonces también será ortogonal a $\mathbf{r}(\mathbf{t}) - P_0$. Luego, deberá cumplirse

$$\langle \mathbf{r}(\mathbf{t}) - P_0, \mathbf{n}_0 \rangle = \langle (x - x_0, y - y_0), (n_x, n_y) \rangle = n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) = n_x x + n_y y - (n_x x_0 + n_y y_0) = 0.$$

Llamemos $A = n_x$, $B = n_y$, $C = -(n_x x_0 + n_y y_0) = -\langle \mathbf{n}_0, \overrightarrow{OP_0} \rangle$, entonces para todo punto (x, y) de la recta vale $Ax + By + C = 0$.

La expresión $Ax + By + C = 0$ se denomina *ecuacion implítica de la recta.*

En la expresión anterior A y B no pueden ser simultáneamente nulos.

Ejemplo 9: Volvamos a la recta que pasa por los puntos $P_0(-2,1)$ y $P_1(2,3)$, y hallemos una expresión implícita.

Ya vimos que un vector director es $\mathbf{r}_0 = (r_x, r_y) = (4,2)$, luego tomamos un vector ortogonal $\mathbf{n}_0 = (n_x, n_y) = (-2,4)$.

Ahora determinamos los coeficientes $A = n_x = -2$, $B = n_y = 4$, $C = -\langle \mathbf{n}_0, \overrightarrow{OP_0}\rangle = -\langle(-2,4),(-2,1)\rangle = -(4+4) = -8$. Luego, una expresión implícita será $r : -2x + 4y - 8 = 0$.

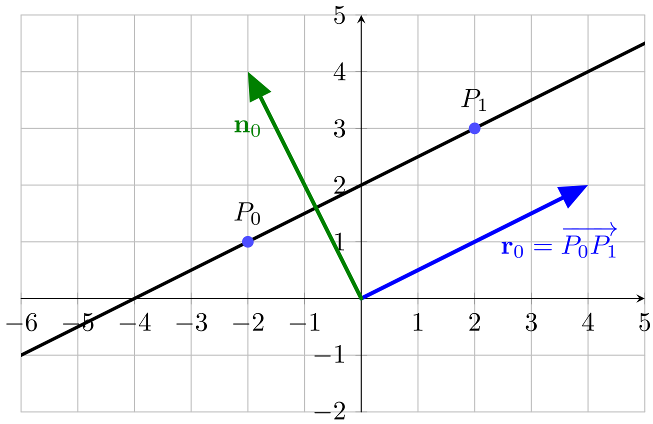

Figure 8: Recta que pasa por dos puntos. $\mathbf{r}_0$ es un vector director de la recta, y $\mathbf{n}_0$ el vector ortogonal utilizado para hallar una expresión canónica.

Algunas observaciones:

1. Si $A = 0$, $B \neq 0$ la recta es paralela al eje x (recta horizontal).
2. Si $A \neq 0$, $B = 0$ la recta es paralela al eje y (recta vertical).
3. Si $C = 0$ la recta pasa por el origen de coordenadas.

2.5 Ecuación segmentaria de la recta

Sea una recta $r : Ax + By + C = 0$ no paralelea a los ejes coordenados y que no contiene al origen de las coordenadas, entonces $A, B, C \neq 0$.

Entonces: $r : Ax + By + C = 0 \quad \Rightarrow \left(-\dfrac{A}{C}\right)x + \left(-\dfrac{B}{C}\right)y = 1$ (pues $C \neq 0$).

Luego $\dfrac{x}{(-\frac{C}{A})} + \dfrac{y}{(-\frac{C}{B})} = 1$.

Si llamamos $p = \left(-\dfrac{C}{A}\right)$ y $q = \left(-\dfrac{C}{B}\right)$, entonces obtenemos una nueva ecuación de la recta.

La expresión
$$r : \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$
se denomina *ecuación segmentaria* de la recta. p es la abscisa de la intersección con el eje x y q la ordenada al origen.

Sabemos que la intersección con el eje horizontal ocurre en un punto $P(x, 0)$. Poniendo eso en la ecuación segmentaria tendremos que $\frac{x}{p} + \frac{0}{q} = \frac{x}{p} = 1 \Rightarrow x = p$.

Luego, la recta r corta al eje x en el punto $P(p, 0)$.

Análogamente, sabemos que la ordenada al origen de una recta ocurre en un punto $P(0, y)$. Poniendo eso en la ecuación segmentaria de la recta obtenemos $\frac{0}{p} + \frac{y}{q} = 1 \Rightarrow y = q$

Por tanto la recta r corta al eje y en el punto $P(0, q)$.

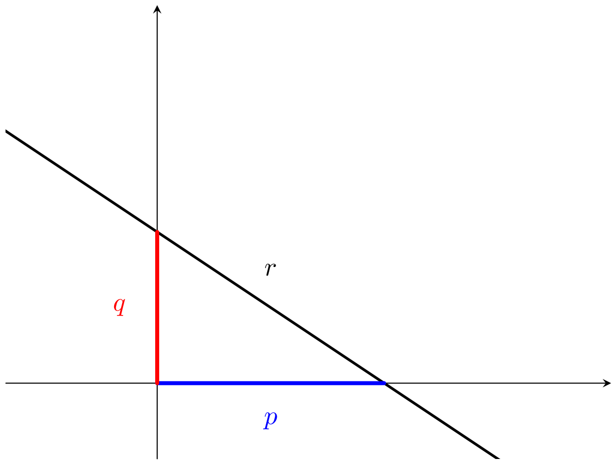

Figure 9: Elementos de la ecuación segmentaria $r : \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.

Ejemplo 10: Volvamos a la recta que pasa por los puntos $P_0(-2, 1)$ y $P_1(2, 3)$, y hallemos su expresión segmentaria.

Ya vimos que la recta tiene una expresión canónica $r : -2x + 4y - 8 = 0$. Pasamos dividiendo por el opuesto del término independiente y obtenemos: $r : \frac{-2}{8}x + \frac{4}{8}y = \frac{x}{-4} + \frac{y}{2} = 1$.

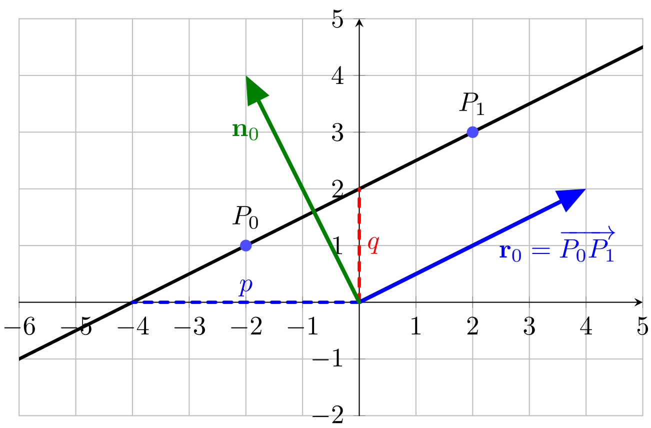

Figure 10: Recta que pasa por dos puntos. $\mathbf{r}_0$ es un vector director de la recta, y $\mathbf{n}_0$ el vector ortogonal utilizado para hallar una expresión canónica, y en color se marcan los segmentos que determinan la expresión segmentaria de la recta.

2.6 Una observación importante

Dada una recta r en el plano, sus expresiones explícita y segmentaria son únicas y cualquiera de las otras no.

En resumen, hay muchas maneras de escribir una misma recta de manera vectorial, paramétrica, simétrica o implícita.

2.7 Distancia de un punto a una recta

Supongamos que tenemos un punto $Q(x, y)$ y queremos hallar su distancia a una recta dada implícitamente por $r : Ax + By + C = 0$.

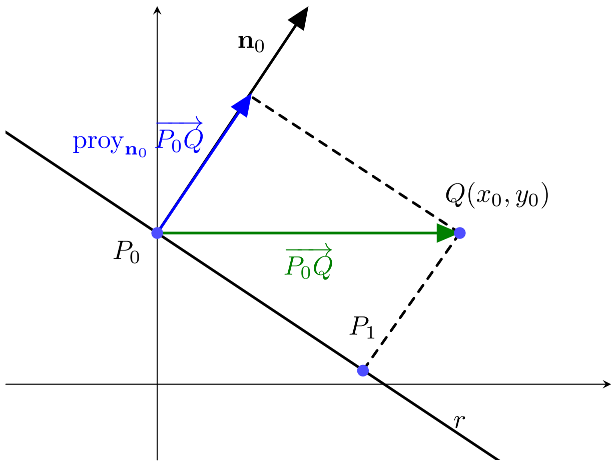

Figure 11

Sabemos entonces que un vector normal $\mathbf{n}_0$ a la recta está dado por $\mathbf{n}_0 = (A, B)$. Además, vemos que la distancia mínima es el módulo del vector $\overrightarrow{P_1Q}$, que es paralelo a $\mathbf{n_0}$, y por regla del paralelogramo, vemos que su módulo coincide con el de la proyección $\text{proy}_{\mathbf{n}_0}\,\overrightarrow{P_0Q}$.

Luego, por lo visto anteriormente $d(r, Q) = \|\,\text{proy}_{\mathbf{n}_0}\,\overrightarrow{P_0Q}\| = |\,\text{proy esc}_{\mathbf{n}_0}\,\overrightarrow{P_0Q}|$.

Desarrollemos un poco la fórmula:

$$d(r, Q) = |\,\text{proy esc}_{\mathbf{n}_0}\,\overrightarrow{P_0Q}| = |\frac{\langle \overrightarrow{P_0Q}, \mathbf{n}_0\rangle}{\|\mathbf{n}_0\|}| = |\frac{\langle Q - P_0, \mathbf{n}_0\rangle}{\|\mathbf{n}_0\|}| = |\frac{\langle \overrightarrow{OQ}, \mathbf{n}_0\rangle - \overbrace{\langle \overrightarrow{OP_0}, \mathbf{n}_0\rangle}^{-C}}{\|\mathbf{n}_0\|}|$$

Así

$$d(r, Q) = |\frac{\langle (x_0, y_0), (A, B)\rangle}{\|(A, B)\|}| = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ejemplo 11: Hallemos la distancia del punto $Q(5, 3)$ a la recta dada implícitamente por $r : -2x+4y-8 = 0$.

Entonces el vector normal usado será $\mathbf{n}_0 = (-2, 4)$, y aplicando la fórmula vista tendremos

$$d(r, Q) = \frac{|-2 \times 5 + 4 \times 3 - 8|}{\sqrt{2 + 16}} = \frac{6}{\sqrt{20}} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$