Coordendas y Curvas Polares

1 Radianes (repaso)

El radián es la manera más usada para medir ángulos. Para entenderla, consideremos el círculo centrado en el origen y de radio $r = 1$, denominada *circunferencia unitaria.* Entonces

> El ángulo formado por dos radios de la circunferencia unitaria, medido en radianes, es igual a la longitud del arco que delimitan los radios.

Así,

- El ángulo nulo, corresponde a 0 radianes.
- El ángulo recto, corresponde a $\dfrac{\pi}{2}$ radianes.
- El ángulo llano, corresponde a π.
- Un giro completo (360°) corresponde a 2π (el perímetro de la circunferencia).

Entonces, valen las siguientes fórmulas de conversión:

> Sea α un cierto ángulo:
>
> 1. Si α está medido en grados, entonces $\alpha \equiv \dfrac{\alpha}{180^\circ}\pi$ radianes *(pasaje de grados a radianes).*
> 2. Si α está medido en radianes, entonces $\alpha \equiv \dfrac{\alpha}{\pi}180^\circ$ *(pasaje de radianes a grados).*

2 Coordenadas Polares

Muchas veces es útil utilizar otros sistemas de coordenadas distintos de las rectangulares. Uno de los más utilizados son las *coordenadas polares.*

> Las coordenadas polares de un punto $P(r, \theta)$ están determinadas por su distancia r a un punto fijo O (denominado *polo*) y el ángulo θ (medido en sentido antihorario) entre el vector $\overrightarrow{OP}$ y la semirecta fija Ox (denominada *eje polar*)

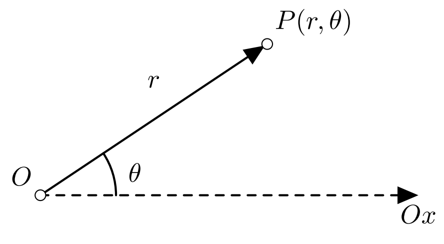

Figure 1: Representación polar de un punto

Dado un punto $P(r, \theta)$ en coordenadas polares

- r es el *radio vector*.
- θ es el *argumento*.

Coordenadas polares elementales

Si tomamos $r > 0$ y $\theta \in [0, 2\pi)$, cada punto P del plano queda **unívocamente** determinado por sus coordenadas polares $P(r, \theta)$.

Por convención tomamos $O(0, 0)$.

Ejemplo 1: Todo punto de la circunferencia unitaria tiene coordenadas polares $P(1, \theta)$, donde θ es el ángulo que el vector $\overrightarrow{OP}$ forma con el vector $\mathbf{i} = (1, 0)$.

2.1 Coordenadas polares generales

A menudo, al realizar cálculos con sistemas en coordenadas polares, podemos obtener el ángulo θ fuera del intervalo $[0, 2\pi)$. Análogamente, también podemos obtener como resultado puntos $P(r, \theta)$ con $r < 0$. Para resolver esta situación, utilizamos las siguientes convenciones:

Sean $r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$, entonces

1. $P(r, \theta) = (r, \theta + 2n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$,
2. $P(r, \theta) = (-r, \theta + \pi)$,
3. $P(-r, \theta) = (r, \theta + \pi)$.

En base a las convenciones escritas arriba, podemos observar lo siguiente:

- Si representamos un punto por coordenadas polares $P(r, \theta)$, la fórmula (1) nos dice que siempre podremos llevar el ángulo θ al intervalo $[0, 2\pi)$ sumando o restando adecuadamente 2π la cantidad de veces necesarias.

Ejemplo 2: De acuerdo a la convención (1) tendremos que los puntos $P(1, \frac{\pi}{4})$, $Q(1, \frac{9}{4}\pi)$ y $R(1, -\frac{15}{4}\pi)$ coinciden.

En efecto $P(1, \frac{\pi}{4}) = (1, \frac{\pi}{4} + 2\pi) = Q(1, \frac{9}{4}\pi)$. Análogamente $P(1, \frac{\pi}{4}) = (1, \frac{\pi}{4} - 2 \times 2\pi) = R(1, -\frac{15}{4}\pi)$.

- Si representamos un punto por coordenadas polares $P(r, \theta)$, las fórmulas (2) y (3), nos indican que para $r < 0$ la convención es tomar el valor $|r|$ en el sentido opuesto al del vector $\mathbf{u}(1, \theta)$.

Ejemplo 3: Los puntos $P(-2, \frac{\pi}{3})$ y $Q(2, \frac{4}{3}\pi)$ coinciden pues $P(-2, \frac{\pi}{3}) = (2, \frac{\pi}{3} + \pi) = Q(2, \frac{4}{3}\pi)$.

De los dos ejemplos anteriores, podemos observar lo siguiente:

Tener en cuenta que

- Al representar puntos de manera polar $P(r, \theta)$ con $r, \theta \in \mathbb{R}$ **perdemos** la representación única del punto.
- La unicidad de la representación se **recupera** al usar las convenciones (1), (2) y (3) para llegar a la representación $P(r, \theta)$ con $r > 0$ y $\theta \in [0, 2\pi)$.

Ejemplo 4: Encontrar la representación polar única de $P(-2, -\frac{17}{5}\pi)$.

Primero lo que haremos es usar quitar el signo negativo del radio: $P(-2, -\frac{17}{5}\pi) = (2, -\frac{17}{5}\pi + \pi) = (2, -\frac{12}{5}\pi)$.

Ahora llevamos el argumento al intervalo $[0, 2\pi)$: $P(2, -\frac{12}{5}\pi) = (2, -\frac{12}{5}\pi + 2\pi) = (2, -\frac{2}{5}\pi) = (2, -\frac{2}{5}\pi + 2\pi) = (2, \underbrace{\frac{8}{5}\pi}_{\in[0,2\pi)})$. Luego, la representación del punto buscada es $P(2, \frac{8}{5}\pi)$.

2.2 Conversión entre sistemas de coordenadas

Ya hemos visto que las coordenadas cartesianas y las polares son dos formas diferentes de representar puntos en el plano. Entonces, un mismo punto admite representaciones $P(x, y) \equiv (r, \theta)$. Ahora veremos cómo pasar de un sistema a otro.

Si el *polo* y el origen de coordenadas coinciden, y el *eje polar* Ox está sobre el semieje x positivo, el *cambio de coordenadas* de un punto $P(x, y) \equiv (r, \theta)$ está dado por:

1. $x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta)$ (polares a cartesianas),
2. $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan(\theta) = \frac{y}{x}$, $x \neq 0$, (cartesianas a polares).

Ejemplo 5: Sea el punto $P(2, \frac{1}{3}\pi)$ expresado en coordenadas polares, determinemos sus coordenadas cartesianas.

Aquí $r = 2$ y $\theta = \frac{1}{3}\pi$, luego $x = 2\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$, $y = 2\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. Luego las coordenadas cartesianas del punto serán $P(1, \sqrt{3})$.

Ejemplo 6: Sea el punto $P(2, 1)$ expresado en coordenadas cartesianas, determinemos sus coordenadas polares.

Aquí $x = 2$, $y = 1$, y por las fórmulas de arriba $r = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, y $\theta = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = 0,463648...$, luego en coordenadas polares $P(\sqrt{5}; 0,463648...)$

Cálculo del $\arctan(\frac{y}{x})$

Al pasar de coordenadas cartesianas a polares, pueden surgir algunas dificultades.

Ejemplo 7: Dado el punto $P(-2, 2)$ en coordenadas cartesianas, expresarlo en polares.

Vemos que $r = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} > 0$. Al calcular el argumento tenemos lo siguiente:

$$\theta = \arctan\left(\frac{2}{-2}\right) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} \notin [0, 2\pi),$$

Entonces podemos sumarle π al valor obtenido y tendremos que $\theta_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3}{4}\pi$ está en el intervalo $[0, 2\pi)$ y cumple $\tan(\theta_1) = -1$.

Pero si sumamos 2π, tendremos $\theta_2 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7}{4}\pi$, que también está en el intervalo $[0, 2\pi)$ y cumple $\tan(\theta_2) = -1$.

Sin embargo, vemos que el punto $P(-2,2)$ está en el segundo cuadrante, mientras que los puntos con argumento $\theta_2 = \frac{7}{4}\pi$ están en el cuarto cuadrante.

Luego, el valor buscado del argumento es $\theta = \theta_1$, y las coordenadas polares del punto son $P(\sqrt{8}, \frac{3}{4}\pi)$.

Recapitulando sobre el ejemplo anterior:

La función arctan toma valores $\arctan(t) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (así da en la mayoría de las calculadoras), pero nosotros necesitamos que $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \in [0, 2\pi)$.

Por otro lado, sabemos que $z = \tan(\alpha) = \tan(\alpha + \pi)$, por lo que tanto α como $\alpha + \pi$ son resultados aceptables para $\arctan(z)$. Así resulta que en el intervalo $[0, 2\pi)$ siempre habrá pares de valores θ_1 y θ_2 verificando $\tan(\theta_1) = \tan(\theta_2)$.

Por eso, tal como lo hicimos en el ejemplo, la elección adecuada del argumento θ finalmente resultará de analizar a cuál cuadrante pertenece el punto.

Para obtener θ en el intervalo $[0, 2\pi)$, se deben usar los siguientes criterios:

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{si} \quad x > 0, y \geq 0 \quad \text{(primer cuadrante)} \\ \frac{\pi}{2} \quad \text{si} \quad x = 0, y > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi \quad \text{si} \quad x < 0 \quad \text{(segundo y tercer cuadrante)} \\ \frac{3}{2}\pi \quad \text{si} \quad x = 0, y < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi \quad \text{si} \quad x > 0, y < 0 \quad \text{(cuarto cuadrante).} \end{cases}$$

3 Lugar geométrico y funciones polares

Las coordenadas polares permiten expresar algunos lugares geométricos de manera más sencilla que en rectangulares.

Ejemplo 8: Expresar en coordenadas polares el lugar geométrico $x^2 + y^2 = 4$ (circunferencia de radio 2, centrada en el origen).

Hacemos el reemplazo $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ y resulta

$$x^2 + y^2 = (r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2 = r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta) = r^2\left(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right) = r^2 = 4.$$

Como $r > 0$, tendremos $r = 2$, y esa será la ecuación polar de la circunferencia.

Notemos que en coordenadas polares, este lugar geométrico se convierte en una función.

Ejemplo 9: Expresar en coordenadas polares el lugar geométrico $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$.

Nuevamente hacemos el reemplazo $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ y resulta

$$\begin{aligned} r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin(\theta) - 4r\cos(\theta) + 6r\sin(\theta) &= 0 \\ r^2 + r^2\left(3\sin(\theta) - 2\cos(\theta)\right) &= 0 \\ r + 2\left(3\sin(\theta) - 2\cos(\theta)\right) &= 0 \\ r &= 2\left(2\cos(\theta) - 3\sin(\theta)\right). \end{aligned}$$

Veamos de qué lugar geométrico se trata:

$$x^2+y^2-4x+6y = x^2-4x+4-4+y^2+6y+9-9 = (x-2)^2+(y+3)^2-4-9 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{(x-2)^2+(y+3)^2 = 13}_{\text{circunferencia}}.$$

Así el lugar geométrico es una circunferencia de radio $r = \sqrt{13}$, centrada en el punto $C(2,-3)$.

Notemos que en coordenadas polares, nuevamente este lugar geométrico se convierte en una función. Además, para $\theta = \frac{\pi}{2}$, tendremos que $r = 2(2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 3\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)) = -6$.

Algunas observaciones a partir de los ejemplos anteriores:

- Curvas que en coordenadas cartesianas solo las podemos representar como lugares geométricos, en coordenadas polares pueden expresarse como funciones.
- A menudo, esa expresión como función involucra radios negativos o valores de θ fuera del rango $[0, 2\pi)$.

3.1 Ecuación polar de las cónicas

Ahora trataremos de expresar las cónicas mediante ecuaciones en coordenadas polares.

Ejemplo 10: Expresar en coordenadas polares la parábola con vértice en el origen dada por $y = \frac{x^2}{4c}$.
Nuevamente hacemos el reemplazo $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ y resulta:

$$r\sin(\theta) = \frac{r^2\cos^2(\theta)}{4c} \Rightarrow \sin(\theta) = \frac{r\cos^2(\theta)}{4c} \Rightarrow r = 4c\frac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)} = \underbrace{4c\tan(\theta)\sec(\theta) = r}_{\text{expresión final}}.$$

La expresión anterior, si bien es correcta, puede mejorarse y simplificarse (en general no nos gustan las ecuaciones con secantes y/o cosecantes).

Ejemplo 11: Supongamos que el foco de la parábola coincide con el polo.

Sea $r = d(P,F) = d(P,O)$ y $r' = d(P, \text{directriz})$, entonces tendremos que

$$r = r' = r\sin(\theta) + 2c \quad \Rightarrow \quad r(1-\sin(\theta)) = 2c \quad \Rightarrow \quad \underbrace{r = \frac{2c}{1-\sin(\theta)}}_{\text{ecuación polar}}.$$

Vemos que esa última expresión es mucho más sencilla. De manera análoga, al colocar el origen de coordenadas en uno de los focos, las expresiones de las cónicas resultan sencillas:

La expresión polar de las cónicas con un foco sobre el origen de coordenadas son:

1. Parábola: $r(\theta) = \frac{2c}{1-\sin(\theta)}$ (eje focal vertical).
2. Elipse: $r(\theta) = \frac{b^2}{a+c\cos(\theta)}$ ($a > b$, $c = \sqrt{a^2-b^2}$).
3. Hipérbola: $r(\theta) = \frac{b^2}{a-c\cos(\theta)}$ ($a > b$, $c = \sqrt{a^2+b^2}$).