Integral definida y áreas

1 Repaso: primitivas e integral indefinida

Dada una función de una variable independiente $y = F(x)$, ya se ha visto cómo se calcula su derivada

$$y' = F'(x) = \frac{dy}{dx}$$

y su diferencial

$$dy = F'(x)dx$$

o, lo que es lo mismo

$$dy = f(x)dx$$

donde $f(x) = F'(x)$.

Pero puede presentarse el problema inverso: dada la derivada $f(x)$, o el diferencial $f(x)dx$, hallar la función primitiva $F(x)$ cuya derivada es $f(x)$ o cuyo diferencial es $f(x)dx$.

Se denomina *primitiva* de $f(x)$ a toda función $F(x)$ que verifica $F'(x) = f(x)$.

Ejemplo 1: Si $f(x) = 2x$, entonces $F(x) = x^2 + 5$ es una primitiva de $f(x)$.

Ejemplo 2: Si $f(x) = 5\cos(x)$, entonces $F(x) = 5\sin(x) + 12$ y $G(x) = 5\sin(x) - 3$ es una primitiva de $f(x)$.

Dada $y = f(x)$, todas las primitivas de f difieren en una constante.

Es decir, si $F(x)$ y $G(x)$ son primitivas de f, entonces sabemos que existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) = G(x) + C$.

Lo anterior, nos permite escribir a las primitivas de una forma general a través de una nueva operación denominada *integración*:

Dada $f(x)$, representamos a todas sus primitivas como

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

la expresión anterior se denomina *integral indefinida de $f(x)dx$.*

Ejemplo 3: Si $f(x) = 2x$, sabemos que todas las primitivas de f se pueden escribir como $F(x) = x^2 + C$, entonces escribimos $\int f(x)\,dx = x^2 + C$.

Propiedades de la integral indefinida

Sean $f(x)$, $g(x)$ funciones, y $a \in \mathbb{R}$, entonces

1. $\displaystyle\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx.$
2. $\displaystyle\int a \cdot f(x)\, dx = a \cdot \int f(x)\, dx.$

Métodos de integración

Sean f, u funciones, F una primitiva de F y $du = u'dx$, entonces vale

$$\int f(u) \underbrace{u'(x)\, dx}_{du} = F(u(x)) + C \quad \text{(método de sustitución).}$$

Ejemplo 4: Calculemos $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ mediante sustitución.

Haciendo $1 - x^2 = u$, resulta $-2x\, dx = du$, o también $x\, dx = -\dfrac{du}{2}$. Si reemplazamos todo eso en la integral, tendremos

$$\int \frac{\overbrace{xdx}^{-du/2}}{\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\sqrt{u}}} = \int \frac{-1}{2\sqrt{u}} du = -\sqrt{u} + C = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

Si u, v son funciones si ponemos $du = u'dx$, $dv = v'dx$, entonces vale:

$$\int u dv = uv - \int v du \quad \text{(integración por partes).}$$

Ejemplo 5: Calcular $\displaystyle\int x \cos(x)\, dx.$

Considerando $x = u$ de donde $dx = du$, y $\cos(x)\, dx = dv$ de donde $\sin(x) = x$, se tiene

$$\int x \cos(x)\, dx = x \sin(x) - \int \sin(x)\, dx = x \sin(x) + \cos(x) + C$$

2 Integral Definida y áreas

Supongamos que tenemos una curva $y = f(x) \geq 0$, definida en el intervalor $[a, b]$, y queremos calcular el *área* bajo la curva (limitada por el eje x). Entonces podemos intentar hacer lo siguiente:

Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n partes iguales, mediante los puntos x_1,..., x_{n-1}, y consideramos $x_0 = a$ y $x_n = b$. Entonces $(x_i - x_{i-1}) = \Delta x$ para $i = 1, ..., n$.

Para cada subintervalo, formamos el rectángulo de altura $f(x_{i-1})$ y base $(x_i - x_{i-1})$. Luego, podemos sumar la superficie de todos esos rectángulos y tomarlos como aproximación al área:

$$A_{\text{aprox}} = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + ... + (x_n - x_{n-1})f(x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\Delta x} f(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x \, f(x_{i-1})$$

De esta manera, obtuvimos una primera aproximación al valor del área.

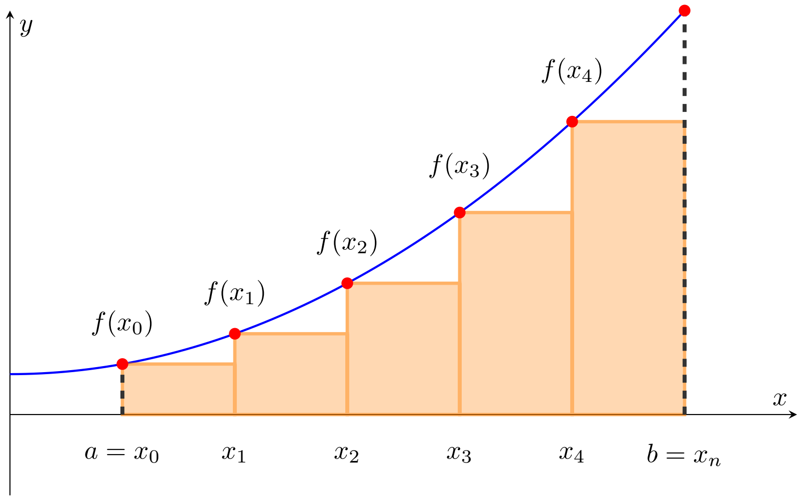

Figure 1: Método de exhausción

Intuitivamente, podemos ver que si hacemos la división del intervalo más fina (incrementando la cantidad n de partes), entonces nos aproximamos mejor al área. Esa aproximación, se expresa a través de un límite.

> Dada $y = f(x)$, la *integral definida de $f(x)$ entre a y b* es el límite
>
> $$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \, f(x_{i-1}) = \int_a^b f(x)dx,$$

Calculemos algunas integrales definidas:

Ejemplo 6: Sea $y = x$ definida en el intervalo $[0, 1]$, calculemos su integral definida sobre dicho intervalo.

Para ello dividamos este intervalo en n partes iguales mediante los puntos:

$$x_0 = 0, \, x_1 = \frac{1}{n}, \, x_2 = \frac{2}{n}, \, ..., x_n = \frac{n}{n} = 1$$

Ahora formemos la suma

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n^2} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (i-1)}_{\substack{\text{progresión} \\ \text{aritmética}}} = \frac{1}{n^2} \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Tomando el límite tendremos

$$\int_0^1 x \, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$$

Vemos que en este caso, la integral definida da el área del triángulo rectángulo de vértices $(0,0),(0,1),(1,0)$.

Ejemplo 7: Sea $y=x^2$ en el mismo intervalo, y la misma división que en el ejemplo anterior. Calculemos la integral definida:

$$\begin{aligned} S_n=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})f(x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{(i-1)}{n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2=\frac{1}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Luego

$$\int_0^1 x^2\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}$$

Y el valor de la integral definida represena el área bajo la parábola en el intervalo $[0,1]$.

Además la integral definida tiene las siguientes propiedades que a veces, ayudan en los cálculos.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones, y $a<c<b$, la integral definida tiene las siguientes propiedades:

1. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx=0,$
2. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx,$
3. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.$

Ejemplo 8: Sea $f(x)=|x-2|$, calculemos $\int_0^3 f(x)\,dx$.

Primero observamos que podemos escribir $f(x)=\begin{cases}-(x-2)\,\text{si}\,x\le 2\\(x-2)\,\text{si}\,x>2\end{cases}$.

Luego, por la propiedad 3 de las integrales definidas, podemos partir la evaluación en el intervalo $[0,3]$ como $\displaystyle\int_0^3=\int_0^2+\int_2^3=I_1+I_2$.

Cálculo de I_1: dividimos el intervalo $[0,2]$ haciendo $x_0=0$, $x_1=2\left(\frac{1}{n}\right)$, ..., $x_n=2\left(\frac{n}{n}\right)=2$, entonces

$$\begin{aligned} S_n=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})f(x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}\left(2-2\frac{i-1}{n}\right)=\sum_{i=1}^{n}4\frac{1}{n}\left(1-\frac{i-1}{n}\right) \\ &= 4\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{n-(i-1)}{n}\right)=4\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}n-\sum_{i=1}^{n}(i-1)\right) \\ &= 4\frac{1}{n^2}\left(n^2-\frac{n(n-1)}{2}\right)=4\left(1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)=4-2+2\frac{1}{n}=2+2\frac{1}{n} \end{aligned}$$

Luego $I_1=\lim\limits_{n\to\infty}2+2\frac{1}{n}=2$.

Cálculo de I_2: dividimos el intervalo $[2,3]$ haciendo $x_0=2$, $x_1=2+\frac{1}{n}$, ..., $x_n=2+\frac{n}{n}=3$, luego

$$\begin{aligned} S_n=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})f(x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}(2+\frac{(i-1)}{n}-2) \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{(i-1)}{n}}_{\text{ejemplo 6}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{2}=I_2 \end{aligned}$$

Así $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

2.1 Cálculo de integrales definidas

Si queremos calcular una integral definida, deseamos un camino más sencillo que el método de *exhausción* utilizado anteriormente.

Sea $y = f(x)$ una función, y $F(x)$ una primitiva, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b \qquad \text{(regla de Barrow)}$$

La *regla de Barrow*nos indica que el cálculo de integrales definidas, se reduce al de hallar primitivas (integral indefinida) y evaluarlas adecuadamente.

Ejemplo 9: Calcular la integral definida $I = \displaystyle\int_{-2}^{3} x^2\,dx$.

Aplicamos la regla de Barrow a $f(x) = x^2$, y buscamos una primitiva: $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$.

Luego $\displaystyle\int_{-2}^{3} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{3} = \frac{27}{3} - \frac{-8}{3} = \frac{35}{3}$

Ejemplo 10: Calcular $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(x)\,dx$.

Aplicamos la regla de Barrow a $f(x) = \sin(x)$, y buscamos una primitiva $F(x) = \cos(x)$.

Luego $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(x)\,dx = [\cos(x)]_0^{2\pi} = \cos(2\pi) - \cos(0) = 1 - 1 = 0$.

2.1.1 Recapitulación

En los ejemplos 6-9, los resultados de las integrales definidas (en los intervalos correspondientes) coinciden con las áreas entre la eje x y la curva $y = f(x)$. La razón es sencilla de ver: notemos que en todos estos casos $f(x) \geq 0$, por lo que es claro que la construcción con rectángulos (conocida como *método de exhaución*) debe aproximar el cálculo del área.

Sin embargo, si $f(x)$ toma valores negativos, la construcción realizada con los rectángulos y el límite siguen teniendo sentido, y por lo tanto la integral definida en el intervalo sigue perfectamente definida. Pero la equivalencia con el área ya no es cierta. Eso es lo que ilustra el ejemplo 10.

En resumen, siempre hay que tener en cuenta que:

La *integral definida* en un intervalo **NO** siempre da el valor del área.