Cálculo de áreas

1 Cambio de extremos

Cuando utilizamos el método de sustitución para resolver una integral, a menudo resulta más sencillo evaluar en nuevos extremos (cambio de variables mediante) que en los originales.

> Sean $f(x)$, $u(x)$ funciones y $F(x)$ una primitiva de f, entonces:
>
> $$\int_{x_1}^{x_2} f\left(u\left(x\right)\right)u'(x)\,dx = \left[F(u)\right]_{u_1}^{u_2},$$
>
> donde $u_1 = u(x_1)$ y $u_2 = u(x_2)$.

Ejemplo 1: Calculemos la integral $I = \displaystyle\int_0^3 \sqrt{3^2 - x^2}\,dx$

Primero intentemos encontrar una primitiva de $f(x) = \sqrt{3^2 - x^2}$. Haciendo $x = 3\sin(u) \Rightarrow dx = 3\cos(u)du$ tendremos

$$\int \sqrt{3^2 - x^2}\,dx = \int \sqrt{3^2 - 3^2\sin^2(u)}\,3\cos(u)du = 3^2\int \cos^2(u)du = \frac{3^2}{2}\left(\sin(u)\cos(u) + u\right)$$

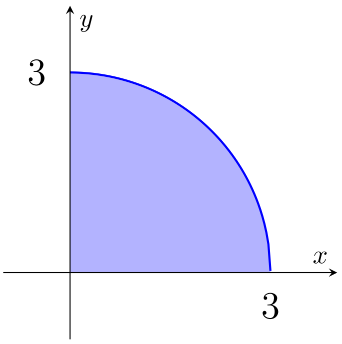
Deshaciendo el cambio de variables tendremos $\cos(u) = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{3^2}} = \dfrac{1}{3}\sqrt{3^2 - x^2}$ y $x = 3\sin(u) \Rightarrow \arcsin\left(\dfrac{x}{3}\right) = u$. Reemplazando tendremos

$$\int \sqrt{3^2 - x^2}\,dx = \frac{3^2}{2}\left(\frac{x}{3^2}\sqrt{3^2 - x^2} + \arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\right)$$

Luego evaluamos

$$I = \left[\frac{1}{2}\left(x\sqrt{3^2 - x^2} + 3^2\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\right)\right]_0^3 = \frac{1}{2}(3\times 0 + 9\arcsin(1)) - \frac{1}{2}(0\times 3 + 9\arcsin(0)) = \frac{1}{2}9\frac{\pi}{2} = \frac{9}{4}\pi$$

Notemos que lo que calculamos fue el área del cuarto de círculo.



Aunque resulta más cómodo hacer los siguientes cambios:

si $x = 3\sin(u)$, entonces $x_0 = 0 = 3\sin(u_0) \Rightarrow u_0 = 0$ o $x_1 = 3 = 3\sin(u_1) \Rightarrow u_1 = \dfrac{\pi}{2}$, luego

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx = \left[\frac{3^2}{2}\left(\sin(u)\cos(u) + u\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0 - \cos(0)\sin(0)\right) = \frac{9}{4}\pi.$$

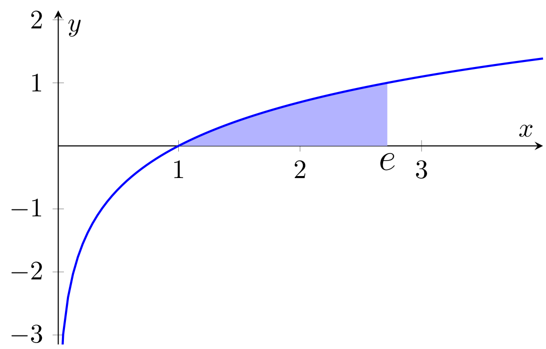
2 Cálculo de áreas en coordenadas cartesianas

Ya hemos visto que una integral definida no siempre da el valor de un área, sin embargo, procediendo de manera adecuada podemos utilizarla para calcular el área entre dos curvas.

Sean $y = f(x)$ y $y = g(x)$ funciones tales que $g(x) \leq f(x)$ sobre $[a, b]$, entonces el área limitada por las curvas y las rectas $x = a$ y $x = b$ está dada por

$$A = \int_a^b \underbrace{(f(x) - g(x))}_{\text{techo-piso}}\, dx$$

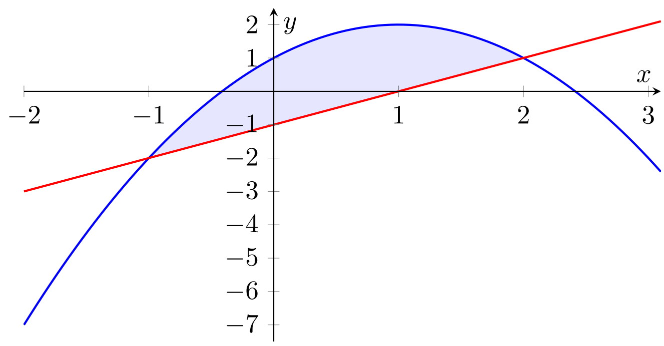
Ejemplo 2: Supongamos que deseamos hallar el área entre la curva $y = \ln(x)$ y el eje x, entre los valores $1 \leq x \leq e$.



Entonces $f(x) = \ln(x)$ (será el "techo"), y tomamos el eje x dado por $g(x) = 0$ (será el "piso"). Luego el área correspondiente estará dada por:

$$\int_1^e \ln(x)\, dx = [x(\ln(x) - 1]_1^e = e(\ln(e) - 1) - 1(\ln(1) - 1) = 1.$$

Ejemplo 3: Determinar el área encerrada por la parábola $y = 1 + 2x - x^2$ y la cuerda que une los puntos $P_0(-1, -2)$ y $P_1(2, 1)$.

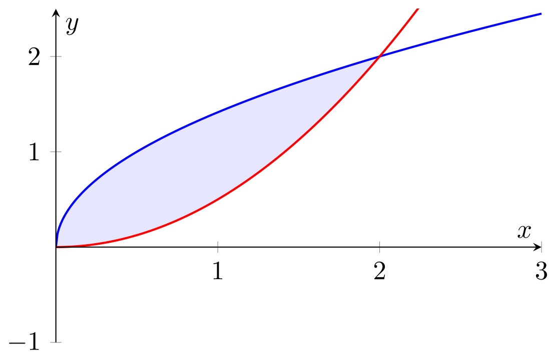


Determinamos la ecuación de la recta $y = mx + b$ y tendremos $m = \dfrac{1 - (-2)}{2 - (-1)} = 1$ y $-1 + b = -2 \Rightarrow b = -2 + 1 = -1$, luego la recta es $y = x - 1$.

Gráficamente vemos que $f(x) = 1 + 2x - x^2 \geq x - 1 = g(x)$ entre los puntos de intersección dados por $x_0 = -1$ y $x_1 = 2$. Luego el área está dada por la integral definida

$$\int_{-1}^2 (1 + 2x - x^2 - (x - 1))\, dx = \int_{-1}^2 (2 + x - x^2)\, dx = \left[2x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^2 = \frac{9}{2}.$$

Ejemplo 4: Calcular el área comprendida entre las parábolas $y^2 = 2x$ y $x^2 = 2y$.



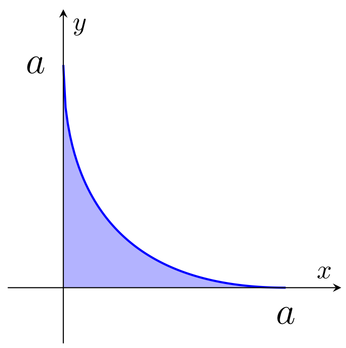
Notemos que las parábolas se cortan entre los puntos $x = 0$ y $x = 2$, y además la primer parábola la podemos escribir como $y = \sqrt{2x}$ en el intervalo $[0, 2]$.

La gráfica nos muestra que $f(x) = \sqrt{2x} \geq \frac{1}{2}x^2 = g(x)$, luego el área buscada será

$$A = \int_0^2 \left(\sqrt{2x} - \frac{1}{2}x^2\right)\, dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6}x^2\right]_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Ejemplo 5: Calcular el área entre el lugar geométrico $\sqrt{y} + \sqrt{x} = \sqrt{a}$ y los ejes coordenados.

Notemos que $x, y \leq 0$ para que la raíz tenga sentido. Y también que $0 \leq x\,, y \leq \sqrt{a}$.



Podemos escribir $\sqrt{y} = \sqrt{a} - \sqrt{x} \Rightarrow y = \left(\sqrt{a} - \sqrt{x}\right)^2 = a - 2\sqrt{a}\sqrt{x} + x$, luego el área buscada estará dada por

$$\int_0^a \left(a - 2\sqrt{a}\sqrt{x} + x\right)\, dx = \left[ax - 2\sqrt{a}\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^2\right]_0^a = \frac{1}{6}a^2.$$

2.1 Integración respecto del eje y

Planteando la integral adecuadamente, podemos simplificar el cálculo de áreas recurriendo a la integral respecto de la variable y.

Sean $x = f(y)$ y $x = g(y)$ funciones tales que $g(y) \leq f(y)$ sobre $[a, b]$, entonces el área limitada por las curvas y las rectas $y = a$ y $y = b$ está dada por

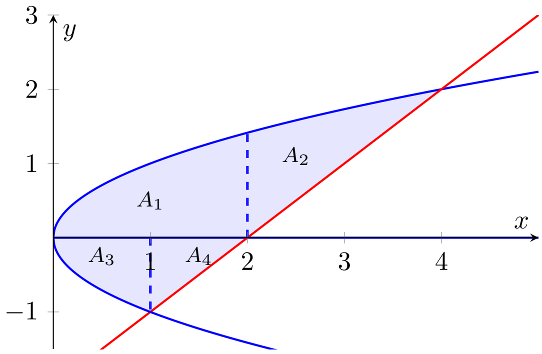
$$A = \int_a^b (f(y) - g(y))\, dy$$

Ejemplo 6: Calcular el área encerrada por las siguientes curvas $\begin{cases} y^2 = x \\ x - y = 2 \end{cases}$

En primer lugar, encontramos los puntos de intersección igualando $y^2 = x$ y $x = 2 + y$, luego

$$y^2 = 2 + y \Rightarrow y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow y_1 = -1\,, y_2 = 2$$

Luego, las curvas se cortan en $P_0(1, -1)$ y $P_1(2, 4)$.



Para calcular el área una opción es seccionar la región en cuatro subáreas (tomando $y = \pm\sqrt{x}$):

1. La limitada por $\sqrt{x}$ (arriba), el eje x (abajo), entre $0 \leq x \leq 2$
2. La limitada por $\sqrt{x}$ (arriba), $x - 2 = y$ (abajo), entre $2 \leq x \leq 4$.
3. La limitada por el eje x (arriba), $y = -\sqrt{x}$ (abajo), entre $0 \leq x \leq 1$.
4. La limitada por el eje x (arriba), $y = x - 2$ (abajo), entre $1 \leq x \leq 2$.

Así tendremos el valor del área expresado como la suma de cuatro integrales definidas $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$, donde

$$A_1 = \int_0^2 \sqrt{x}\, dx, \qquad A_2 = \int_2^4 (\sqrt{x} - x + 2)\, dx, \qquad A_3 = \int_0^1 \sqrt{x}\, dx, \qquad A_4 = \int_1^2 (2 - x)\, dx.$$

Sin embargo hay un camino más sencillo: si “rotamos” todo 90, podemos tomar como variable independiente a y, y aplicamos la fórmula “techo-piso”.

Tomamos $f(y) = y + 2$ y $g(y) = y^2$, y vemos que en el área en consideración se verifica $-1 \leq y \leq 2$, luego $A = \displaystyle\int_{-1}^{2} (y + 2 - y^2)\, dy = \left[\frac{1}{2}y^2 + 2y - \frac{1}{3}y^3\right]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$.