Cuádricas y superficies de revolución

1 Cuádricas

Luego de los planos y los cilindros, las superficies más sencillas son las generadas por ecuaciones de segundo orden con todas la variables (es decir, que haya variables elevadas al cuadrado). Este tipo de superficies se denominan *cuádricas*.

A continuación, presentamos 6 tipos de superficies que son representativas:

Elipsoide.

Es la superficie dada definida por $S : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

Los puntos $A(\pm a, 0, 0)$, $B(0, \pm b, 0)$ y $C(0, 0, \pm c)$ son los *vértices* del elipsoide, y los segmentos entre vértices del mismo tipo determinan los *ejes*.

Sus trazas, paralelas a cualquier plano coordenado son elipses.

Hiperboloide de una hoja

Es la superficie definida por $S : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

La trazas paralelas al plano xy son elipses. Mientras que las paralelas al plano yz o xz son hipérbolas.

Hipérbola de dos hojas

Es la superficie definida por $S : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$.

Esta superficie tienen dos partes. En los planos paralelos al plano xy que intersecan la superficie, las trazas son elipses. En los planos paralelos a xz y yz, las trazas son hipérbolas.

Paraboloide elíptico

Es la superficie dada por $S : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$.

La traza en el plano xy es un punto (el origen O), y las trazas paralelas al plano xy son elipses. Las trazas paralelelas a los eje xz y yz son parábolas.

Hiperboloide parabólico (silla de montar)

Es la superficie dada por $S : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = z$.

La traza en el plano xy es un par de rectas $y = \pm b\dfrac{x}{a}$. Las trazas paralelas al plano xy son hipérbolas (cuyo eje principal varía dependiendo de la altura del plano). Las trazas paralelas a los planos xz y yz son parábolas.

Cono elíptico

Es la superficie dada por $S : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = z^2$.

La superficie tiene dos partes, unidas por el vértice en O. La traza en el plano xy es dicho punto (el origen O), y las trazas paralelas al plano xy son elipses. Las trazas paralelas a los planos xz y yz son hipérbolas.

1.0.1 Simetrías de las cuádricas

El elipsoide, el hiperboloide de una y dos hojas, y el cono elíptico, se denominan *cuádricas con centro.*

Notemos que sus ecuaciones no se modifican al cambiar $P(x, y, z)$ por $P(-x, -y, -z)$, por lo que resultan simétricas respecto del origen O.

Tampoco se modifican al hacer cambios de la forma $P(-x, -y, z)$ (por lo que son simétricas respecto del eje z), ni de la forma $P(x, y, -z)$ (por lo que son simétricas respecto del plano xy). El mismo análisis puede realizarse con los restantes ejes y planos coordenados. Así:

Las cuatro cuádricas con centro son simétricas respecto del origen O, los ejes y los planos coordenados.

En cambio *los paraboloides son simétricos respecto de dos planos coordenados y el eje común a ellos, pero no tienen centro de simetría.*

1.1 Expresión general de las cuádricas

La *ecuación general* **incompleta** *de las superficies cuádricas* es:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0$$

La expresión se denomina incompleta porque los denominados *términos rectangulares* xy, xz, yz no forman parte de la ecuación.

Las trazas paralelas a los planos coordenados de las superficies descriptas por la ecuación general, siempre son cónicas (pueden ser degeneradas).

Cuádricas degeneradas: Si hubiera una variable faltante en la ecuación de una cuádrica, por ejemplo si $C = F = 0$ (falta la variable z), y tampoco hubiera términos lineales (es decir $D = E = 0$) podemos obtener:

- un cilindro recto si $A, B, G > 0$,
- un cilindro hiperbólico si $A > 0$, $B < 0$, $G > 0$,
- dos planos paralelos si $A > 0$, $B = 0$, $G > 0$,
- un eje si $A, B > 0$, $G = 0$,
- dos planos que se cortan si $A > 0$, $B < 0$, $G = 0$.
- un cilindro parabólico si $A \neq 0$, $B = 0$, y también $E \neq 0$.

así resulta que *los cilindros rectos, parabólicos e hiperbólicos, planos, rectas también son cuádricas*.

Por ello, junto al cono elíptico y el punto (caso $A, B, C > 0$ y $D = E = F = G = 0$) forman el conjunto de las denominadas *cuádricas degeneradas.*

1.2 Análisis de cuádricas

De manera análoga a lo realizado con las cónicas, dada una ecuación cuádrica, nos interesa saber cuál es la superficie descripta, y eso lo haremos completando cuadrados.

Si al completar cuadrados obtengo una superficie con ecuación

$$S : A' \underbrace{(x - x_0)}_{\bar{X}}{}^2 + B' \underbrace{(y - y_0)}_{\bar{Y}}{}^2 + C' \underbrace{(z - z_0)}_{\bar{Z}}{}^2 + D' = 0,$$

la cuádrica tiene centro $P(\bar{X} = 0, \bar{Y} = 0, \bar{Z} = 0) \equiv P(x_0, y_0, z_0)$.

Ejemplo 1: Determinar el tipo de cuádrica descripto por $S : x^2 + 4y^2 - x + 4y + z - 1 = 0$ y hallar su centro.

Procedemos reagrupando y completando cuadrados:

$$\begin{aligned}
x^2 + 4y^2 - x + 4y + z - 1 = x^2 - x + 4y^2 + 4y + z - 1 &= 0 \\
&= \left(x^2 - 2\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + \left((2y)^2 + 2\,(2y) + 1 - 1\right) + z - 1 = \\
&= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (2y + 1)^2 + z - \frac{1}{4} - 1 - 1 \\
&= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{9}{4}\right) = 0
\end{aligned}$$

Ahora analizamos la última expresión:

$$\underbrace{\left(x - \frac{1}{2}\right)}_{\bar{X}}{}^2 + 4\underbrace{\left(y + \frac{1}{2}\right)}_{\bar{Y}}{}^2 + \underbrace{\left(z - \frac{9}{4}\right)}_{\bar{Z}} = 0 \quad \Rightarrow -\bar{X}^2 - 4\bar{Y}^2 = \bar{Z}$$

y concluímos que la superficie es un paraboloide elíptico.

Como se trata de un paraboloide elíptico, la superficie no tiene centro.

2 Superficies de revolución

Una superficie de revolución la genera una curva plana $\mathcal{C}$ (contenida en un plano coordenado) al girar alrededor de uno de los ejes del plano.

<u>Aclaración:</u> hay una definición más general de las superficies de revolución, pero nosotros trabajaremos con la arriba presentada.

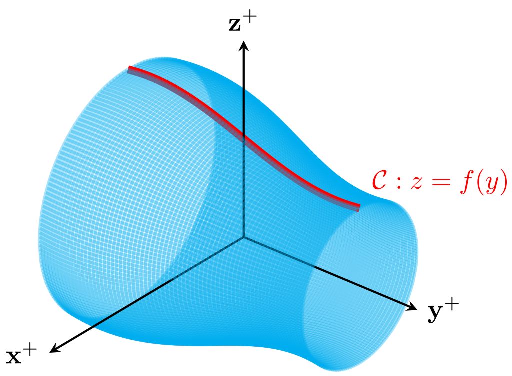

Figure 1: Superficie de revolución obtenida al girar la curva $\mathcal{C}$ alrededor del eje y.

Determinación de la ecuación de una superficie de revolución

A continuación presentamos una tabla que muestra cómo obtener la ecuación de la superficie de revolución generada por una curva $\mathcal{C}$.

Generatriz	**Eje de rotación**	**Ecuación de la superficie**
$\mathcal{C}: F(x,y)=0$ (contenida en en plano xy) $\mathcal{C}: F(x,z)=0$ (contenida en en plano xz)	x	$S: F\left(x; \pm\sqrt{y^2+z^2}\right)=0$
$\mathcal{C}: F(x,y)=0$ (contenida en en plano xy) $\mathcal{C}: F(y,z)=0$ (contenida en en plano yz)	y	$S: F\left(y; \pm\sqrt{x^2+z^2}\right)=0$
$\mathcal{C}: F(x,z)=0$ (contenida en en plano xz) $\mathcal{C}: F(y,z)=0$ (contenida en en plano yz)	z	$S: F\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z\right)=0$

El uso del $\pm$ depende del contexto (en cuál cuadrante del plano coordenado está ubicada la curva generatriz $\mathcal{C}$, o si corta o no al eje de rotación, etc.), y a menudo *el signo $\pm$ puede cancelarse elevando convenientemente al cuadrado, o escribiendo la superficie a trozos.*

Ejemplo 2: Determinar la ecuación de las superficies de revolución generadas por la curva $\mathcal{C}: z = e^y$, y siendo los ejes de rotación el eje z y el eje y.

Notemos que aquí la curva se puede escribir como $\mathcal{C}: F(y,z) = z - e^y = 0$.

Eje de rotación z: De acuerdo a la tercer fila de la tabla previa, no debemos modificar la variable z (eje de rotación) en $F(y,z)$ y hay que sustituír y por $\pm\sqrt{x^2+y^2}$. Así la superficie resultará

$$S: z - e^{\pm\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \Rightarrow S: z = e^{\pm\sqrt{x^2+y^2}},$$

pero analizando la superficie, vemos que tiene dos partes: cuando el exponente es $+$ (positivo) ocurre $z \geq 1$, cuando es negativo tenemos $z < 1$ (esto sucede porque la curva $\mathcal{C}$ corta al eje z en $z = 1$). Así podemos reescribir la ecuación de la superficie:

$$S: \begin{cases} z = e^{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad z \geq 1 \\ z = e^{-\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad z \leq 1 \end{cases} .$$

Eje de rotación y: En este caso, dejamos sin modificar la variable y y reemplazamos z por $\pm\sqrt{x^2+z^2}$. Así, obtenemos

$$S: \pm\sqrt{x^2+z^2} = \underbrace{e^y}_{>0} \Rightarrow S: \sqrt{x^2+z^2} = e^y,$$

donde la simplificación del $\pm$ ocurrió analizando la positividad de la función exponencial e^y.

Otra opción, es elevar al cuadrado:

$$S: \pm\sqrt{x^2+z^2} = e^y \Rightarrow S: \left(\pm\sqrt{x^2+z^2}\right)^2 = (e^y)^2 \Rightarrow S: x^2+z^2 = e^{2y},$$

y obtenemos una expresión equivalente para la superficie.

Reconociendo superficies de revolución

> Las trazas de una superficie de revolución S, paralelas al plano coordenado que **no** contiene al eje de rotación, siempre son circunferencias o un punto.

Con ese criterio detectaremos si una superficie dada puede ser o no de rotación, cuál es su generatriz y cuál su eje de rotación.

Ejemplo 3: Mostrar que la superficie $S : F(x, y, z) = x^2 + z^2 - \sin^2 y = 0$ es de rotación.

Tomando trazas paralelas al plano coordenado xz, es decir $y = k$, tenemos que las trazas son secciones curvas $F(x, k, z) = \begin{cases} x^2 + y^2 - \sin k^2 = 0 \\ y = k \end{cases}$. Vemos que si $k = n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$ la traza es un punto, caso contrario una circunferencia. Así concluímos que el eje de rotación es el eje y (el que no está contenido en el plano xy).

Para hallar la curva generatriz, buscamos la traza de la superficie sobre un plano coordenado que contenga al eje de rotación (eje y es en este caso). Tomamos, por ejemplo, el plano xy, entonces la traza correspondiente la obtendremos haciendo $z = 0$, así $\mathcal{C} : F(x, y, 0) = x^2 - \sin(y)^2 = 0 \Rightarrow \mathcal{C} : x = \sin(y)$.

Otro criterio muy útil es el siguiente:

> Una superficie $S : F(x, y, z) = 0$ será de revolución si la expresión de $F(x, y, z)$
>
> - tiene $x^2 + y^2$ separado de z (eje de rotación z),
> - tiene $x^2 + z^2$ separado de y (eje de rotación y),
> - tiene $y^2 + z^2$ separado de z (eje de rotación x).

Ejemplo 4: En la superficie del ejemplo anterior $S : F(x, y, z) = x^2 + z^2 - \sin^2 y = 0$, como $x^2 + z^2$ está separado de la variable y, sabemos que la superficie es de revolución y su eje de rotación es y. La curva generatriz $\mathcal{C}$ se obtiene como se indicó anteriormente.

Con este criterio podemos detectar cuándo ciertas cuádricas son de rotación o no.

Elipsoide de revolución: Si el elipsoide está dado por $\mathcal{E} : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, entonces es de revolución. Eje de rotación z, y la generatriz es la elipse $\mathcal{C} : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

Paraboloide de revolución: Si el paraboloide está dado por $\mathcal{E} : z = ax^2 + ay^2$, entonces es de revolución. Eje de rotación z, y la generatriz es la parábola $\mathcal{C} : z = ax^2$.

Otros ejemplos: El hiperboloide de una y dos hojas también puede ser revolución, al igual que el cono elíptico (que en este caso, se denomina *cono circular*).