

Trabajo Práctico No. 1: Vectores y aplicaciones.

1.
 - a) Dados los puntos $A(1, 3)$ y $B(-1, 2)$. Halle las componentes de los vectores \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{BA} .
 - b) Halle las coordenadas del origen P del vector $\mathbf{u} = (-3, 2)$, si su extremo coincide con $Q(0, 8)$.
 - c) Halle las coordenadas del extremo B del vector $\mathbf{u} = (-3, 2)$, si su origen coincide con $A(3, 5)$.
2.
 - a) Dado $\mathbf{a} = (x, -3)$. Halle, en caso de ser posible, el/los valor/es de $x \in \mathbb{R}$ de manera tal que $\|\mathbf{a}\| = 4$.
 - b) ¿Un vector queda determinado por su módulo? Es decir, si dos vectores tienen el mismo módulo, ¿son el mismo vector?
3. Dados los vectores $\mathbf{a} = (3, -1)$, $\mathbf{b} = (-2, -2)$ y $\mathbf{c} = -3\mathbf{i} - \mathbf{j}$ halle, analítica y geométricamente, los vectores:
 - a) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$
 - b) $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$
 - c) $\frac{1}{2}\mathbf{a} - \mathbf{b}$
4.
 - a) Dado $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$ halle un vector \mathbf{b} de módulo 3, con igual dirección y sentido contrario a \mathbf{v} .
 - b) Dado $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$ halle un vector unitario \mathbf{c} paralelo a \mathbf{v} . ¿Es único?
5. Dados los puntos $A(1, 3)$, $B(2, -5)$, $C(1, 0)$ y los vectores $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{AC}$ y $\mathbf{w} = \overrightarrow{BC}$, calcule:
 - a) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$
 - b) $\langle 2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}, -\mathbf{w} \rangle$
 - c) $\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|^2$
 - d) $\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{w}$
 - e) $\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{w}\|}$
 - f) $\text{proy}_{\mathbf{v}} \mathbf{u}$
 - g) $\text{proy}_{\text{esc}_{\mathbf{v}}} \mathbf{u}$
6. Usando los puntos del ejercicio anterior, halle el perímetro y los ángulos interiores del triángulo con vértices A , B y C .

7. Para los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} definidos en el punto 5, calcule el módulo y el ángulo con cada uno de los ejes cartesianos.

8. Dados los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} en cada inciso, determine si son paralelos u ortogonales.

a) $\mathbf{a} = (2, -4)$ y $\mathbf{b} = (-1, 2)$

b) $\mathbf{a} = (4, 2)$ y $\mathbf{b} = (-\frac{1}{2}, 1)$

9. Dados los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} :

a) $\mathbf{a} = (2, -4 + t)$ y $\mathbf{b} = (-1, 2t)$

b) $\mathbf{a} = (4, 2t^2)$ y $\mathbf{b} = (-\frac{1}{2}, 1)$

Halle, en caso de ser posible, los valores de t para que los vectores sean paralelos y/o perpendiculares.

10. a) Halle, en caso de ser posible, las componentes de un vector \mathbf{u} sabiendo que es perpendicular al vector $(-2, 3)$ y que $\langle \mathbf{u}; \mathbf{i} - 3\mathbf{j} \rangle = 5$.

b) Halle, en caso de ser posible, las componentes de un versor sabiendo que es perpendicular al vector $(-2, 3)$.

11. a) Halle $\langle 3\mathbf{u} + 2\mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle$ sabiendo que $\|\mathbf{u}\| = 3$, $\text{proy}_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = 4$ y que \mathbf{x} es ortogonal a \mathbf{v} .

b) Encuentre el módulo del vector \mathbf{w} sabiendo que $\mathbf{c} = (2, 3)$ es perpendicular al vector \mathbf{u} , $\langle \mathbf{u} + 2\mathbf{w}, \mathbf{c} \rangle = 2\sqrt{13}$ y el ángulo que forma \mathbf{w} con \mathbf{c} es $\frac{\pi}{3}$.

c) ¿Qué condición deben satisfacer los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} para que $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ sea ortogonal a $\mathbf{u} - \mathbf{v}$? Interprete geoméricamente.

12. Un barco navega hacia el norte con una velocidad de 12 nudos. Sabiendo que la velocidad de la marea es de 5 nudos y dirigida hacia el oeste, calcule el módulo, dirección y sentido del vector resultante del barco. Represente gráficamente.

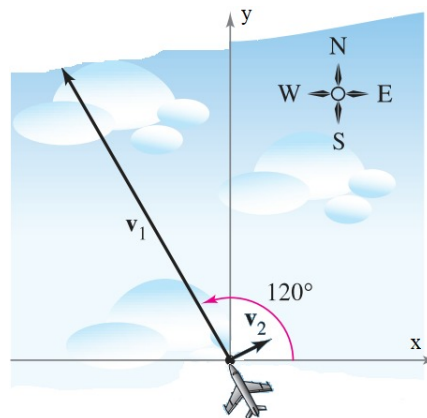
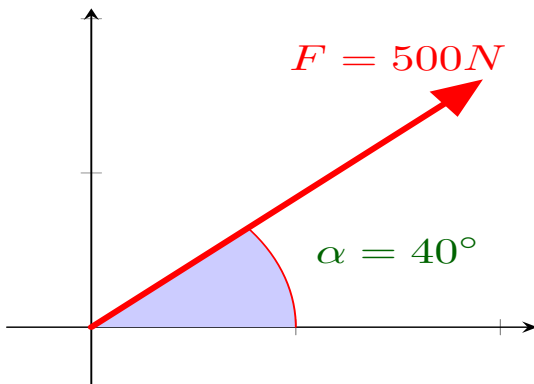


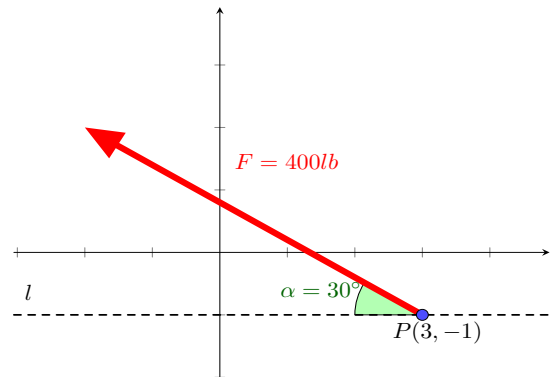
Figura 1: Ejercicio 13

13. Un avión viaja a 200 km/h con velocidad $\mathbf{v}_1 \propto (\cos 120^\circ, \sin 120^\circ)$. Al llegar a un cierto punto se encuentra con un viento de 70 km/h en dirección NE, es decir, con velocidad $\mathbf{v}_2 \propto (\cos 45^\circ, \sin 45^\circ)$. Ver Figura 1.

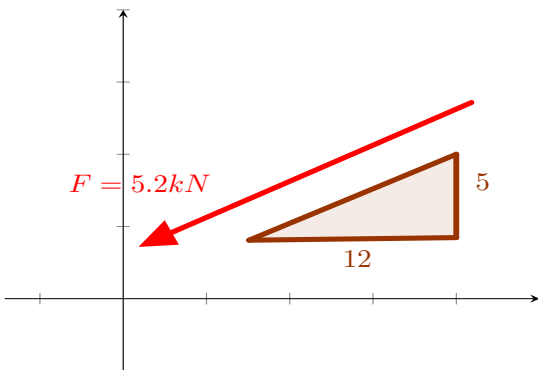
- a) Encuentre el vector velocidad resultante \mathbf{v} . Grafique \mathbf{v} en un nuevo sistema a partir de la suma geométrica de los vectores \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 .
- b) Calcule $\text{proy}_{\mathbf{v}} \mathbf{v}_1$.



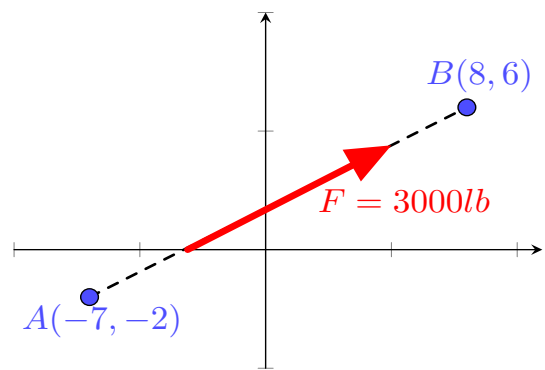
(a) Ejercicio 14-a



(b) Ejercicio 14-b



(c) Ejercicio 14-c



(d) Ejercicio 14-d

Figura 2: Ejercicio 14

14. Resolver:

- a) La fuerza \mathbf{F} tiene una magnitud de 500 N. Expresar la fuerza como un vector en forma de componentes y en términos de los versores \mathbf{i} y \mathbf{j} . Ver gráfico en la Figura 2a.
- b) La magnitud de la fuerza \mathbf{F} es de 400 lb. Expresar \mathbf{F} como un vector en términos de los vectores unitarios \mathbf{i} y \mathbf{j} . Ver gráfico en la Figura 2b.
- c) La pendiente de la fuerza \mathbf{F} se muestra en la figura. Expresar \mathbf{F} como un vector en términos de los versores \mathbf{i} y \mathbf{j} . Ver gráfico en la Figura 2c.
- d) La recta de acción de la fuerza \mathbf{F} se muestra en la figura, pasa por los puntos A y B. Determine las componentes del vector \mathbf{F} . Ver gráfico en la Figura 2d.

15. Halle la ecuación paramétrica y vectorial de la recta:

- a) que pasa por $P_0(1, 2)$ y es paralela al vector $\mathbf{u} = (-1, 4)$. Grafique.
- b) que pasa por $P_0(1, 2)$ y $P_1(3, 5)$.
- c) que representa el eje Y .
- d) que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al vector $\mathbf{u} = (-2, 3)$.
- e) Perpendicular a la recta $L : -5x + 3y = 1$ que pasa por el punto $P(0, 2)$. Halle su ecuación implícita. Grafique las dos rectas.

16. Dadas las rectas de ecuación: $L_1 : 2x - y = 2$; $L_2 : x - 3y = 0$; $L_3 : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 \end{cases}$
, $t \in \mathbb{R}$ y $L_4 : \begin{cases} x = 3t \\ y = 6t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. Halle analíticamente: $L_1 \cap L_3$, $L_2 \cap L_4$. En caso de intersectarse, calcular el ángulo determinado por las rectas.

17. Sea $L : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + kt \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. Halle, en caso de ser posible, el/los valor/es de $k \in \mathbb{R}$ de modo que:

- a) El punto $P(2, 3)$ pertenezca a L .
- b) L sea paralela a la recta $3x + 5y = 2$.
- c) L sea perpendicular a la recta $3x + 5y = 2$.
- d) L sea perpendicular al eje X .