Trabajo Práctico No. 1: Vectores y aplicaciones.

Vectores

1. *a*) Dados los puntos $A(1,3)$ y $B(-1,2)$. Halle las componentes de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$.

   b) Halle las coordenadas del origen P del vector $\mathbf{u} = (-3,2)$, si su extremo coincide con $Q(0,8)$.

   c) Halle las coordenadas del extremo B del vector $\mathbf{u} = (-3,2)$, si su origen coincide con $A(3,5)$.

2. *a*) Dado $\mathbf{a} = (x,-3)$. Halle, en caso de ser posible, el/los valor/es de $x \in \mathbb{R}$ de manera tal que $\|\mathbf{a}\| = 4$.

   b) ¿Un vector queda determinado por su módulo? Es decir, si dos vectores tienen el mismo módulo, ¿son el mismo vector?

3. Dados los vectores $\mathbf{a} = (3,-1)$, $\mathbf{b} = (-2,-2)$ y $\mathbf{c} = -3\mathbf{i} - \mathbf{j}$ halle, analítica y geométricamente, los vectores:

   a) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$

   b) $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$

   c) $\frac{1}{2}\mathbf{a} - \mathbf{b}$

4. *a*) Dado $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$ halle un vector $\mathbf{b}$ de módulo 3, con igual dirección y sentido contrario a $\mathbf{v}$.

   b) Dado $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$ halle un vector unitario $\mathbf{c}$ paralelo a $\mathbf{v}$. ¿Es único?

5. Dados los puntos $A(1,3)$, $B(2,-5)$, $C(1,0)$ y los vectores $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{AC}$ y $\mathbf{w} = \overrightarrow{BC}$, calcule:

   a) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$

   b) $\langle 2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}, -\mathbf{w} \rangle$

   c) $\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|^2$

   d) $\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{w}$

   e) $\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{w}\|}$

   f) $\text{proy}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u}$

   g) $\text{proy esc}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u}$

6. Usando los puntos del ejercicio anterior, halle el perímetro y los ángulos interiores del triángulo con vértices A, B y C.

7. Para los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ definidos en el punto 5, calcule el módulo y el ángulo con cada uno de los ejes cartesianos.

8. Dados los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ en cada inciso, determine si son paralelos u ortogonales.

   a) $\mathbf{a} = (2, -4)$ y $\mathbf{b} = (-1, 2)$

   b) $\mathbf{a} = (4, 2)$ y $\mathbf{b} = \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

9. Dados los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$:

   a) $\mathbf{a} = (2, -4 + t)$ y $\mathbf{b} = (-1, 2t)$

   b) $\mathbf{a} = (4, 2t^2)$ y $\mathbf{b} = \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

   Halle, en caso de ser posible, los valores de t para que los vectores sean paralelos y/o perpendiculares.

10. *a*) Halle, en caso de ser posible, las componentes de un vector $\mathbf{u}$ sabiendo que es perpendicular al vector $(-2, 3)$ y que $\langle \mathbf{u}; \mathbf{i} - 3\mathbf{j} \rangle = 5$.

    b) Halle, en caso de ser posible, las componentes de un versor sabiendo que es perpendicular al vector $(-2, 3)$.

11. *a*) Halle $\langle 3\mathbf{u} + 2\mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle$ sabiendo que $\|\mathbf{u}\| = 3$, proy $\text{esc}_{\mathbf{u}}\, \mathbf{v} = 4$ y que $\mathbf{x}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$.

    b) Encuentre el módulo del vector $\mathbf{w}$ sabiendo que $\mathbf{c} = (2, 3)$ es perpendicular al vector $\mathbf{u}$, $\langle \mathbf{u} + 2\mathbf{w}, \mathbf{c} \rangle = 2\sqrt{13}$ y el ángulo que forma $\mathbf{w}$ con $\mathbf{c}$ es $\frac{\pi}{3}$.

    c) ¿Qué condición deben satisfacer los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ para que $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ sea ortogonal a $\mathbf{u} - \mathbf{v}$? Interprete geométricamente.

Aplicaciones

12. (Ejercicio opcional) Un barco navega hacia el norte con una velocidad de 12 nudos. Sabiendo que la velocidad de la marea es de 5 nudos y dirigida hacia el oeste, calcule el módulo, dirección y sentido del vector resultante del barco. Represente gráficamente.

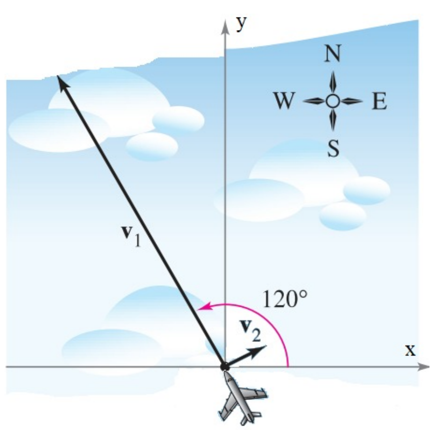
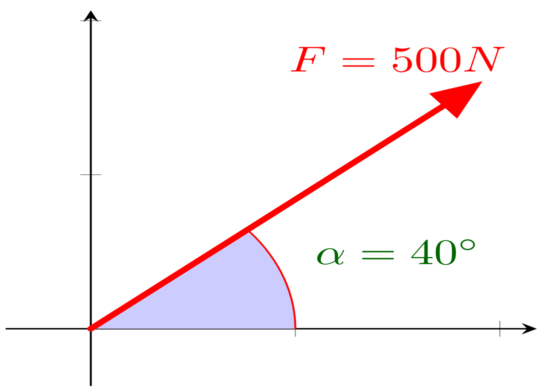


Figura 1: Ejercicio 13

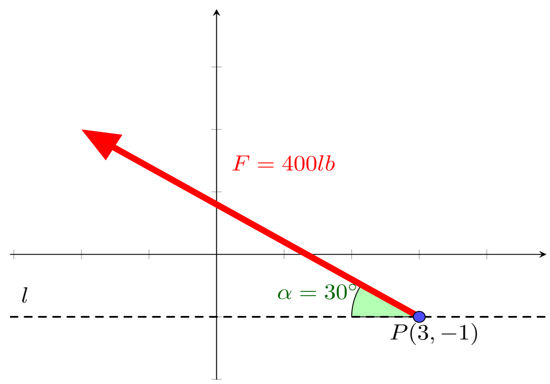
13. (Ejercicio opcional) Un avión viaja a 200 km/h con velocidad $\mathbf{v}_1 \propto (\cos 120°, \sin 120°)$. Al llegar a un cierto punto se encuentra con un viento de 70 km/h en dirección NE, es decir, con velocidad $\mathbf{v}_2 \propto (\cos 45°, \sin 45°)$. Ver Figura 1.

    a) Encuentre el vector velocidad resultante $\mathbf{v}$. Grafique $\mathbf{v}$ en un nuevo sistema a partir de la suma geométrica de los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.

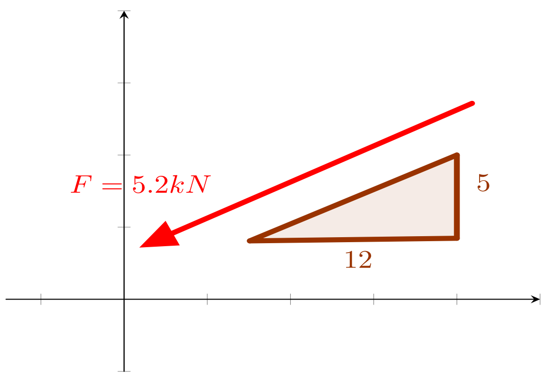
    b) Calcule $\text{proy}_{\mathbf{v}_2} \mathbf{v}_1$.



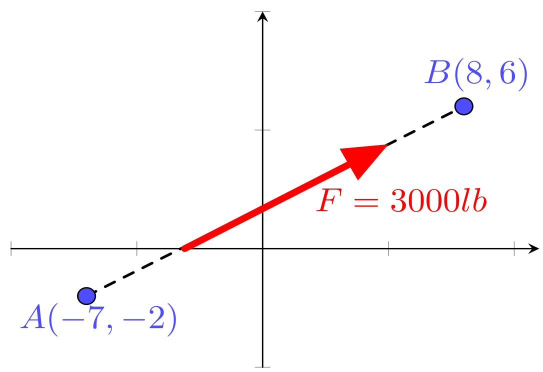
(a) Ejercicio 14-a



(b) Ejercicio 14-b



(c) Ejercicio 14-c



(d) Ejercicio 14-d

Figura 2: Ejercicio 14

14. (Ejercicio opcional) Resolver:

    a) La fuerza $\mathbf{F}$ tiene una magnitud de 500 N. Exprese la fuerza como un vector en forma de componentes y en términos de los versores $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$. Ver gráfico en la Figura 2a.

    b) La magnitud de la fuerza $\mathbf{F}$ es de 400 lb. Exprese $\mathbf{F}$ como un vector en términos de los vectores unitarios $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$. Ver gráfico en la Figura 2b.

    c) La pendiente de la fuerza $\mathbf{F}$ se muestra en la figura. Exprese $\mathbf{F}$ como un vector en términos de los versores $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$. Ver gráfico en la Figura 2c.

    d) La recta de acción de la fuerza $\mathbf{F}$ se muestra en la figura, pasa por los puntos A y B. Determine las componentes del vector $\mathbf{F}$. Ver gráfico en la Figura 2d.

Rectas

15. Halle alguna expresión paramétrica y vectorial de la recta:

    a) que pasa por $P_0(1,2)$ y es paralela al vector $\mathbf{u} = (-1,4)$. Grafique.

    b) que pasa por $P_0(1,2)$ y $P_1(3,5)$.

    c) que representa el eje Y.

    d) que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al vector $\mathbf{u} = (-2,3)$.

    e) Perpendicular a la recta $L : -5x + 3y = 1$ que pasa por el punto $P(0,2)$. Halle su ecuación implícita y segmentaria. Grafique las dos rectas.

16. Considere las rectas $L_1 : 2x - y = 2$, $L_2 : x - 3y = 0$, $L_3 : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ y $L_4 : \begin{cases} x = 3t \\ y = 6t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

    a) Halle analíticamente: $L_1 \cap L_3$, $L_2 \cap L_4$. En caso de intersectarse, calcular el ángulo determinado por las rectas.

    b) Dar la expresión segmentaria de L_1 y una expresión simétrica de L_2.

17. Sea $L : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + kt \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. Halle, en caso de ser posible, el/los valor/es de $k \in \mathbb{R}$ de modo que:

    a) El punto $P(2,3)$ pertenezca a L.

    b) L sea paralela a la recta $3x + 5y = 2$.

    c) L sea perpendicular a la recta $3x + 5y = 2$.

    d) L sea perpendicular al eje X.