Trabajo Práctico No. 5: Vectores, rectas y planos en el espacio

1. *a*) Dados los puntos $A(3,-1,2)$ y $B(-1,2,1)$, halle las componentes de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$. Represente gráficamente.

   b) Halle las coordenadas del origen A del vector $\mathbf{u}=(3,-1,4)$, si su extremo coincide con $B(1,2,-3)$.

   c) Halle las coordenadas del extremo B del vector $\mathbf{u}=(3,-1,2)$, si su origen es $A(1,1,1)$.

   d) Si $\mathbf{u}=(4,-12,z)$, hallar z, sabiendo que $\|\mathbf{u}\|=13$.

2. Dados los puntos $A(-1,3,-7)$, $B(2,-1,5)$, $C(0,1,-5)$ y los vectores $\mathbf{u}=\overrightarrow{AB}$, $\mathbf{v}=\overrightarrow{AC}$ y $\mathbf{w}=\overrightarrow{BC}$, calcule:

   a) $\langle(2\mathbf{u}+\mathbf{w});(2\mathbf{w}-\mathbf{u})\rangle$

   b) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2$ y $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2$

   c) $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle\,\mathbf{w}$ y $\langle\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle\,\mathbf{u}$

   d) Los ángulos interiores del triángulo formado por los vértices A, B y C.

3. *a*) Halle un valor de k para que $\mathbf{u}=(1,k,3)$ y $\mathbf{v}=(2,1,k)$ sean ortogonales. ¿Este valor es único?

   b) Halle un vector de módulo 2 que tenga la misma dirección que el vector $\mathbf{u}=(1,2,3)$. ¿Cuántos vectores existen en estas condiciones?

   c) Halle un vector de módulo 2 que sea perpendicular al vector $\mathbf{u}=(1,2,3)$. ¿Cuántos vectores existen en estas condiciones?

4. Dados los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$:

   a) $\mathbf{a}=(-3t,24,-1)$ y $\mathbf{b}=(-1,8,-t)$

   b) $\mathbf{a}=(2t,-6,1)$ y $\mathbf{b}=(-1,3t,\frac{1}{2})$

   Halle, en caso de ser posible, los valores de t para que los vectores sean paralelos y/o perpendiculares.

5. *a*) Los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ forman entre sí un ángulo de $45°$ y $\|\mathbf{u}\|=3$. Determine el módulo de $\mathbf{v}$ de modo tal que el vector $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ sea ortogonal al vector $\mathbf{u}$.

   b) Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores que verifican $\|\mathbf{u}+5\mathbf{v}\|^2-10\|\mathbf{u}\|\,\text{proy esc}_{\mathbf{u}}\,\mathbf{v}=26\|\mathbf{u}\|^2$, pruebe que $\|\mathbf{u}\|=\|\mathbf{v}\|$.

   c) Sean $\mathbf{w}=(3,0,-1)$ y $\mathbf{v}$ un vector arbitrario perpendicular a $\mathbf{u}$. Halle $\text{proy esc}_{\mathbf{w}}\,\mathbf{u}$, sabiendo que $\langle 3\mathbf{v}+2\mathbf{w},\mathbf{u}\rangle=14$.

d) Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, vectores tales que $\mathbf{u}$ es perpendicular a $\mathbf{w}$ y el ángulo que forman $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es de $30°$. Halle $\|\mathbf{w}\|$, sabiendo que $\mathbf{v} = (2, -2, 2)$ y $\langle \mathbf{v} - \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = 18$.

6. *a*) Calcule $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ y $\mathbf{v}\times\mathbf{u}$ y represente gráficamente, siendo $\mathbf{u} = (4, -2, 0)$ y $\mathbf{v} = (0, 3, 0)$.
   b) Calcule $(2\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{v}$ y $(2\mathbf{u} - \mathbf{v}) \times (2\mathbf{u} + \mathbf{v})$, siendo $\mathbf{u} = (1, -2, 3)$ y $\mathbf{v} = (-3, 3, 1)$.
   c) Halle un vector de módulo 5, perpendicular a ambos vectores $\mathbf{u} = (1, -2, 3)$ y $\mathbf{v} = (0, 1, 4)$.
   d) Halle el área del triángulo cuyos vértices son $P = (3, 5, 2)$, $Q = (1, -1, 6)$ y $R = (-2, 1, 4)$.

7. *a*) Calcule el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\mathbf{u} = (1, -2, 3)$, $\mathbf{v} = (0, 1, 4)$ y $\mathbf{w} = (1, 1, 1)$.
   b) Sean $\mathbf{u} = (1, 2, -3)$, $\mathbf{v} = (2, 1, 5)$ y $\mathbf{w} = (1, 2, -1)$. Halle todos los vectores $\mathbf{r}$, paralelos a $\mathbf{w}$, tales que el volumen determinado por $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{r}$ sea 40.

8. Encontrar una ecuación vectorial, paramétrica y, si existen, las ecuaciones simétricas de la recta r en cada uno de los siguientes casos.
   a) $A(-1, 3, 2) \in r$ y $\mathbf{v} = (2, 2, -1) \parallel r$.
   b) $B(1, -3, 4) \in r$ y $\mathbf{v} = (0, 2, 3) \parallel r$.
   c) $C(0, 1, 3) \in r$ y $\mathbf{v} = (0, 5, 2) \parallel r$.
   d) $D(1, -1, 1) \in r$ y $\mathbf{v} = (0, 0, -1) \parallel r$.
   e) $P_0(7, 6, 6) \in r$ y $P_1(5, 2, 4) \in r$.
   f) $P_0(-1, 0, 4) \in r$ y $P_1(1, 0, 2) \in r$.

9. Hallar la intersección con los planos coordenados de las rectas obtenidas en el inciso anterior, y graficar.

10. Halle una ecuación paramétrica de las siguientes rectas y, si existen, sus ecuaciones simétricas:
    a) Que pase por el punto $P(2, -1, 3)$ y es paralela al vector $\mathbf{v} = (-1, 6, 5)$.
    b) Que pase por el punto $P_0(-5, 0, 1)$ y es paralela a la recta L:

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -t \\ z = -1 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

    c) Que pase por los puntos $A(1, -3, 2)$ y $B(4, -2, 6)$.
    d) Que pase por el punto $Q(2, -1, 2)$ y sea perpendicular al plano de ecuación $\pi : 7x + 6y + 5z = -4$.

11. Escriba la ecuación de los siguientes planos:

a) Perpendicular al vector $\mathbf{v} = (-1, 0, 1)$ que pase por el punto $P(4, 2, 0)$.

b) Que contenga los puntos $P_0(-7, 1, 0)$, $P_1(2, -1, 3)$ y $P_2(1, -1, 0)$.

c) Que pasa por el punto $P(2, 3, 1)$ y es paralelo a los vectores $\mathbf{u} = (2, 1, 1)$ y $\mathbf{v} = (-3, 1, 0)$.

d) Paralelo al plano $\pi : 5x - y + 3z - 1 = 0$ y pasa por el origen de coordenadas.

e) Paralelo al plano yz, que pase por el punto $P(1, 2, 3)$.

12. Analice la intersección con los ejes coordenados y los planos coordenados en cada uno de los siguientes casos. Represente gráficamente:

a) $z + 4 = 0$

b) $x = -2$

c) $3x + 6y - 12 = 0$

d) $y + 4z - 16 = 0$

e) $2x + 2y - z = 2$

f) $3x + 6y + 3z - 24 = 0$

13. Dada la recta $L : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$, halle las ecuaciones de los siguientes planos:

a) Paralelo a L que pasa por el origen de coordenadas. ¿Es único?

b) Perpendicular a L que pasa por el punto $P(-1, 3, 0)$.