Trabajo Práctico No. 7: Superficies: Simetrías, Cilindros y Cuádricas.

1. Analizar las simetrías de las siguientes superficies (identificar correctamente la ecuación $F(x, y, z) = 0$ que define a S):

   a) $x + y + 3z = 3$
   b) $y = x^2$
   c) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$
   d) $x^2 + 4y^3 + 9z^2 = 36$
   e) $2x^2 + y^2 - 2y + z = 0$
   f) $x^6 = 1$
   g) $x^3 - y^2 - z^2 = 1$
   h) $-x^2 - 2z^3 = -3y$
   i) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
   j) $z = 4 - |x| - |y|$

2. Sea la superficie $S : Ax^3 + Bx^2 + 2y - Cz^2 + D = 0$. Hallar, si resulta posible, valores A, B, C, D tales que:

   a) S sea simétrica respecto a los planos coordenados xy y xz.
   b) S sea simétrica respecto al origen O y $C \neq 0$.
   c) S sea simétrica respecto al eje x.
   d) S sea simétrica respecto al eje x, pero no al plano xy.
   e) S sea simétrica únicamente respecto a dos planos coordenados y dos ejes.

3. Ver que todas las trazas de $S : x^2 + y^2 + z^4 - z^2 = 0$ paralelas al plano xy son circunferencias. ¿Cuándo la circunferencia tiene radio 0? Analizar qué significa eso y graficar mediante las trazas.

4. Idem el ejercicio anterior con $S : x^2 + y^2 + z^4 - z^2 = 1$.

5. Analizar las trazas paralelas al plano xy de la superficie $S : x^2 + y^2 - z^3 + z = 0$ y ver que siempre son circunferencias o es vacía. Determinar para qué valores de z la traza no es vacía. ¿En cuál sentido el radio de la traza siempre crece? Graficar mediante las trazas.

6. Dar la ecuación de los cilindros S con directriz $\mathcal{C}$ y generatriz paralela a $\mathbf{v}$ o la recta r (graficar S y $\mathcal{C}$):

   a) $\mathcal{C} : x - y + 1 = 0, z = 0$, $\mathbf{v} = (2, 1, 3)$.
   b) $\mathcal{C} : x^2 + \dfrac{z^2}{4} = 1, y = 0$, $\mathbf{v} = (0, 1, 3)$.
   c) $\mathcal{C} : y^2 - \dfrac{z^2}{4} = 1, x = 0$, $r : t(2, 1, 3) + (3, 3, -4)$.

d) $\mathcal{C}: x^3 + y = 0, z = 0,\ r: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+5}{2}$.

7. Graficar mediante las trazas con los planos coordenados las siguientes cuádricas (determinar de qué tipo es):

   a) $S: x^2 + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{9} = 1$.

   b) $x^2 - y^2 - \dfrac{z^2}{4} = 1$.

   c) $x^2 + \dfrac{y^2}{4} - z^2 = 0$.

8. Sea la ecuación $S: x^2 + ay^2 - 4z^2 = b$. Determinar a y b para que dicha ecuación represente:

   a) Un hiperboloide de una hoja.

   b) Un hiperboloide de una hoja cuya traza con algun plano coordenada sea una hipérbola equilátera.

   c) Una superficie cilíndrica recta, cuya directriz cumpla que la distancia del centro a un foco es igual a 5.

   d) Un hiperboloide de dos hojas.

9. Dar la ecuación de la cuádrica S, que pasa por los puntos $P_1(1,2,1)$ y $P_2(0,1,-1)$, y su traza con el plano coordenado xz es la parábola $\mathcal{C}: x^2 - 2x + z + 1 = 0$.

10. Dar la ecuación de la cuádrica S, que pasa por $P(0,1,1)$, tiene simetría respecto del plano coordenado xz y su traza con el plano $y = 2$ es $\mathcal{C}: 4x^2 - x - z^2 = 4$.

11. Dar la ecuación de la cuádrica S con centro $C(1, y_0, 1)$, que pasa por $P(1,1,1)$, y su traza con el plano $\pi: z = 3$ es la cónica $\mathcal{C}: 4x^2 + 3y^2 - 8x - 6y - 1 = 0$.

12. Dar la ecuación de la cuádrica S con centro $C(x_0, 2, 1)$, que pasa por $P(0,0,1)$, y su traza con el plano $\pi: z = 2$ es la cónica $\mathcal{C}: 3x^2 - 2y^2 - 6x + 8y - 6 = 0$.